

信州大学工学部

学士論文

スケーラブル符号の
非ランダムな構成に関する検討

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電子情報システム工学科
学籍番号 19T2059F
氏名 木原 颯大

2023 年 3 月 31 日

目次

1	はじめに	1
2	1 対 1 のレート歪み問題	2
3	スケーラブル符号化の問題	3
4	スケーラブル符号の構成	6
4.1	歪みの大きい符号の構成	7
4.2	歪みの小さい符号の構成	10
5	まとめ	15
	謝辞	16
	参考文献	16

1 はじめに

昨今の情報化社会では、通信の効率を考えることが重要である。通信とは情報源出力を受信者に届けることである。通常、情報源出力と受信者の間には符号器と復号器が設置され、符号器は情報源の出力を符号化し、復号器はそれをもとに情報源の出力を復元する。通信の効率を向上させるということは、言い換えると、符号化レートを小さくすることである。

さらに、実際の通信では、復号器の出力は情報源の出力と完全に一致しなくてもよい場合がある。例えば、動画を送信するときなどでは、復号器の出力はもとの情報源の出力にある程度似ていれば十分である。この復号器の出力と情報源の出力の違いは歪みと呼ばれる尺度で測られる。一般に、歪みがある程度大きくなることを許容すれば符号化レートをさらに小さくすることができ、通信の効率を向上させることができる。そこで、許容する歪みと符号化レートとの関係を明らかにすることが重要となる。その関係を数学的に示すことはレート歪み問題と呼ばれる。

上記の問題を拡張して、受信者を複数に増やし、それぞれの受信者の許容する歪みの大きさが異なるという状況を考える。例えば、動画配信サービスを使うとき、受信者は状況に応じて適切に画質を設定することで符号化レートを調整したいという状況が当てはまる。このようなとき、各受信者に対して適した符号を個別に用意し、情報源出力をそれぞれの符号で符号化するという方法が最も単純である。

一方、それとは別に次のような方法を考えることもできる。まず、許容する歪みが最も大きな受信者のために符号語を構成する。次に、許容する歪みが2番目に大きな受信者のために追加の符号語を構成する。以降は同様に、許容する歪みが大きな順に追加の符号語を構成し、全ての受信者に対応する。このような方法を用いるとき、要求する歪みが大きな受信者の受け取る符号語は、要求する歪みがそれ以下の受信者も受け取る。そのため、符号を個別に用意する場合と比べて、符号化レートの総量を小さくすることができる。このような符号化方法をスケラブル符号化 (階層符号化) という。スケラブル符号化は、すでに JPEG, H.264/SVC, MPEG-2, MPEG-4 といった画像や動画の規格で採用されている。しかし、それらの規格は実用性を重視して定められたものであり、理論的な限界を達成するかどうかは検証されていない。一方、情報理論の分野ではスケラブル符号化の理論的な限界を数学的に明らかにすることが行われており、その成果は今後の技術開発に貢献することが期待される。

本論文ではそのような背景のもと、一定の条件のもとで、スケラブル符号の存在を示す補題を証明した。この補題は、スケラブル符号化の順定理を示す際に利用できる見通しである。

本論文は次のような章から構成される。2章では従来議論されている、情報源に対し受信者が1対1である場合のレート歪み達成可能性を確認し、3章では情報源に対し受信者を2人に

増やし、本論文で扱うスケーラブル符号化の問題を定式化する。4 章では 2,3 章をふまえて、どのようなスケーラブル符号が構成可能かを検討する。最後に 5 章で本論文をまとめる。

2 1 対 1 のレート歪み問題

スケーラブル符号化の問題では複数の受信者が登場するが、本章では受信者が 1 人の場合の基本的なレート歪み問題を定式化し、問題の拡張に備える。

情報源アルファベットを $\mathcal{X}$ としたとき、一般情報源は $\mathcal{X}^n$ 上の任意の確率分布 P_{X^n} をもつ確率変数 X^n の列として $\mathbf{X} = \{X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{n=1}^\infty$ という記号で表される。一般情報源は全ての非定常または非エルゴードな情報源を含む情報源で、きわめて一般的な情報源である。

一般に、実数値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ に対して以下を定義する。

定義 1

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} Z_n \triangleq \inf \left\{ \alpha \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0 \right\} \quad (1)$$

を確率的上極限という。

次に、長さ n 文字の情報源系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ と受信者 $\mathbf{Y}^n$ の間に符号を導入する。符号語数が M_n となる符号語の集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$ とする。このとき、情報源系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ を $\mathcal{M}_n$ のいずれかの要素に変換する操作を符号化といい、この変換を表す写像 $\varphi_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ を符号器という。また、符号語を、復号アルファベット $\mathcal{Y}$ の要素の系列 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ に変換する操作を復号化といい、この変換を表す写像 $\psi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{Y}^n$ を復号器という。

符号語 $m \in \mathcal{M}_n$ を受信者 $\mathbf{Y}^n$ に伝えるには、符号語 m を符号アルファベット $\mathcal{U}$ の要素からなる文字列で表す必要がある。この変換を 1 対 1 にするには、 $\mathcal{U}$ の要素からなる文字列の長さを固定長にすればよい。このような符号化を固定長符号化という。

固定長符号化における符号語長は、 $\mathcal{U}$ の要素数を k としたとき、 $\lceil \log_k M_n \rceil$ で表すことができる。以降、数学的な解析を簡単にするため、この対数の底を e として考える。また、この量を使って以下を定義する。

定義 2 長さ n の情報源系列を符号化するために必要な 1 文字当たりの符号語長は

$$\frac{1}{n} \log M_n \quad (2)$$

で表される。この量は符号化レートといい、符号の性能を評価する基準となる。

では次に、歪みを定義する。各 n に対する歪み測度を $d_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow [0, +\infty)$ と定め、 $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ と $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ 間の歪みという。系列の長さ n ごとに歪み d_n が定義されていることに注意されたい。

定義 3 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ に対して

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \quad (3)$$

を定義する. $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の間の最大歪みという.

我々は許容する最大歪みを設定し, そのうえで符号化レートをできるだけ小さくしたい. 与えられたレートと歪みが同時に実現可能かどうかを次のように表す.

定義 4 (R, D) が達成可能とは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (4)$$

$$\text{かつ} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_e M_n \leq R \quad (5)$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することである. ただし M_n は符号語数である.

そのうえで, レート歪み関数を以下のように定義する.

定義 5

$$R(D) \triangleq \inf \{ R | (R, D) \text{ が達成可能} \} \quad (6)$$

をレート歪み関数と呼ぶ.

レート歪み関数を数学的に表現することがレート歪み問題の基本的な問題である.

ここで, 定理を記述するために, 次を定義する.

定義 6

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (7)$$

とし, これを $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ.

レート歪み関数は相互情報量スペクトル上限を用いて以下のように表すことができる [3].

定理 1 レート歪み関数 $R(D)$ は

$$R(D) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (8)$$

と表される.

3 スケーラブル符号化の問題

前章では, 受信者が 1 人であるときのレート歪み問題を確認した. 本章では, 受信者を 2 人に増やし, スケーラブル符号化の問題を定式化する. 情報源 $\mathbf{X}$ と 2 人の受信者 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ を考え, 受信者 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ はそれぞれ $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_1) \leq D_1, D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_2) \leq D_2$ であることを要求しているとする. ただし, $D_1 < D_2$ である.

この要求を満たすため、本論文ではスケーラブル符号化の考え方を適用する．受信者が2人の場合、スケーラブル符号化は、図1のモデルで表すことができる．この通信モデルは次のように解釈することができる．

まず、 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_2$ の間の1対1通信として、符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$, $\varphi_n^{(2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(2)}$, $\psi_n^{(2)} : \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$ を構成する．この符号を用いて、受信者 $\mathbf{Y}_2$ は形式的に

$$Y_2^n \triangleq \psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n)) \quad (9)$$

と定義される．受信者 $\mathbf{Y}_2$ の要求により、 $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_2) \leq D_2$ でなければならない．

次に、受信者 $\mathbf{Y}_1$ のために符号器 $\varphi_n^{(1-2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)}$ と復号器 $\psi_n^{(1)} : \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$ を構成する．スケーラブル符号化の考え方に従い、復号器 $\psi_n^{(1)}$ の入力は $\varphi_n^{(1-2)}(X^n)$ と $\varphi_n^{(2)}(X^n)$ の2つである．したがって、受信者 $\mathbf{Y}_1$ は形式的に

$$Y_1^n \triangleq \psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1-2)}(X^n), \varphi_n^{(2)}(X^n)) \quad (10)$$

と定義される．符号器 $\varphi_n^{(1-2)}$ と復号器 $\psi_n^{(1)}$ は、受信者 $\mathbf{Y}_1$ の要求 $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_1) \leq D_1$ を満たすように構成されなければならない．

ちなみに、復号器 $\psi_n^{(1)}$ がその入力 $\varphi_n^{(2)}(X^n)$ を無視すると $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_1$ の間で1対1通信をしているのと同じになる．これは、スケーラブル符号が1対1通信より悪くならないことを意味している．

次に、問題を簡単化するため、図1のモデルを図2の様に変更する．

まず、 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_2$ の間では、図1と同一の符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ を使い、1対1通信として通信する．また、 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_1$ の間では、図1と同一の符号器 $\varphi_n^{(2)}$ と $\varphi_n^{(1-2)}$ と復号器 $\psi_n^{(1)}$ を使って通信するが、ここでの符号器 $\varphi_n^{(2)}$ は、受信者 $\mathbf{Y}_1$ だけのために複製したものであるとする．

このように考えても、 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ の間の関係は図1と変わらずそれぞれ、 $Y_1^n = \psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1-2)}(X^n), \varphi_n^{(2)}(X^n))$, $Y_2^n = \psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n))$ で表すことができ、図1と図2の通

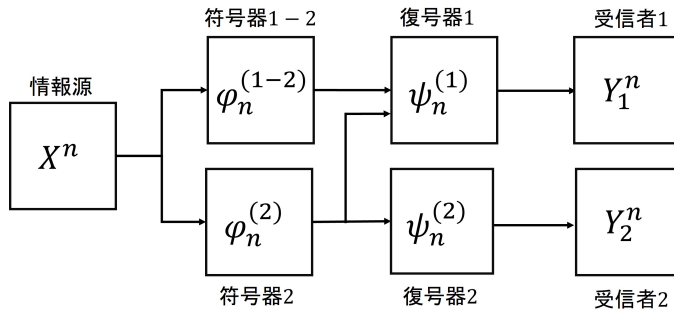


図1 スケーラブル符号化の通信モデル

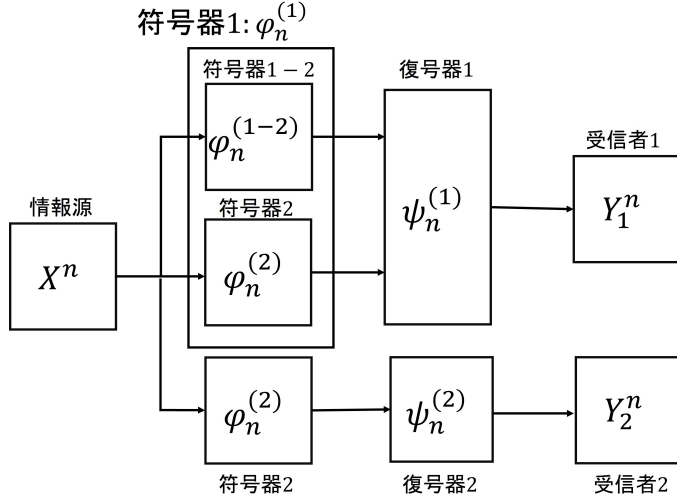


図2 スケーラブル符号化の通信モデル2

信モデルは等価であることが確認できる．つまり，図2での符号の性能を評価することと，図1の符号の性能を評価することは同値である．

さらに，図2では符号器 $\varphi_n^{(1)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)}$ を

$$\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x}) \triangleq (\varphi_n^{(1-2)}(\mathbf{x}), \varphi_n^{(2)}(\mathbf{x})) \quad (11)$$

として定義する．このように考えれば， $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}_1$ の間の関係は $Y_1^n = \psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))$ で表すことができ，符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ により構成される1対1通信とみなせる．

図2はそれぞれの受信者に対して別々に1対1通信路を用意し符号を扱うような通信モデルとなっているため，図1よりも単純であるといえる．したがって本論文では，図2のモデルを採用し，スケーラブル符号化の問題を考える．

以上を踏まえて，定義4と同様に次を定義する．

定義7 スケーラブル符号化において (R_1, R_2, D_1, D_2) が達成可能とは

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n^{(i)}(\varphi_n^{(i)}(X^n))) \leq D_i \quad (12)$$

$$\text{かつ} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n^{(i)} \leq R_i \quad (13)$$

$$(i = 1, 2)$$

を満たし，ある符号器 $\varphi_n^{(1-2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)}$ を考えたときに

$$\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x}) \triangleq (\varphi_n^{(1-2)}(\mathbf{x}), \varphi_n^{(2)}(\mathbf{x})) \quad (14)$$

を満足するような符号器 $\varphi_n^{(1)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)}$, 復号器 $\psi_n^{(1)} : \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$, 符号器 $\varphi_n^{(2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(2)}$, そして復号器 $\psi_n^{(2)} : \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$ が存在することである。ただし, $M_n^{(i)}$, $i = 1, 2$ はそれぞれ符号 $(\varphi_n^{(i)}, \psi_n^{(i)})$, $i = 1, 2$ の符号語数である。

スケーラブル符号化の主要な問題は, 与えられた条件に対して達成可能な符号が存在するかどうかを調べることである。

4 スケーラブル符号の構成

前章では, スケーラブル符号化のレート歪み達成可能性を定義した。我々は達成可能なレート歪み領域を特定することに興味がある。本章ではその前段階として, スケーラブルな符号の組 $((\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)}), (\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)}))$ を数学的に構成し, この符号の性能を評価する。以下の補題はそのために考えたものである。

補題 情報源 X^n に対し, それと相関のある Y_2^n を考える。また R_2, γ を任意に与えられた正の定数としたうえで,

$$\mathcal{B}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y_2^n}(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq R_2 - \gamma \right. \right\} \quad (15)$$

とおき, $\mathcal{S}_n^{(2)}(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を引数とする $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とすると, ある符号器 $\varphi_n^{(2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(2)}$ と復号器 $\psi_n^{(2)} : \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$ の組が存在し

$$\frac{1}{n} \log M_n^{(2)} \leq R_2 \quad (16)$$

$$\Pr \left\{ X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n))) \right\} \leq \Pr \left\{ X^n \notin \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n) \right\} + \Pr \left\{ X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n) \right\} + e^{-n\gamma} \quad (17)$$

を満たす。ただし, $M_n^{(2)}$ は符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ の符号語数である。

さらに, 情報源 X^n に対し, それと相関のある Y_1^n を考える。また R_1 を任意に与えられた正の定数としたうえで,

$$\mathcal{B}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \frac{1}{n} \log \frac{\Pr \left\{ X^n = \mathbf{x} \mid Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \right\}}{\Pr \left\{ X^n = \mathbf{x} \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \right\}} \leq R_1 - R_2 - \gamma \right. \right\} \quad (18)$$

$$\mathcal{D}^{(2)} \triangleq \bigcup_{k \in \mathcal{M}_n^{(2)}} (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \quad (19)$$

とおき, $\mathcal{S}_n^{(1)}(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を引数とする $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とすると, ある符号器 $\varphi_n^{(1-2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)}$ と復号器 $\psi_n^{(1)} : \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}^n$ が存在し, $\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x}) \triangleq$

$(\varphi_n^{(1-2)}(\mathbf{x}), \varphi_n^{(2)}(\mathbf{x}))$ のもとで

$$\frac{1}{n} \log M_n^{(1)} \leq R_1 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \mid X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \\ & \leq \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n), Y_1^n) \mid X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} + \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(Y_1^n) \mid X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (21)$$

を満たす．ただし， $M_n^{(1)}$ は符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ の符号語数である．

この補題は，不等式 (16) と不等式 (20) によって，これから構成するスケーラブル符号の符号化レートがそれぞれ，不等式 (13) を満たすことを意味する．また，不等式 (17) と不等式 (21) は，歪みの評価に関する不等式として使うことができる．このことから，この補題を用いれば，スケーラブル符号化のレート歪み関数の順定理を証明することができると考えられる．

補題の証明は以下のような 2 つの手順を 2 つの節に分けて行う．まず，先行研究 [2] と同様の方法で歪みの大きい符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ を構成し，符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ の符号化レート R_2 と事象 $X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n)))$ の確率を評価することで，符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ が式 (16), (17) を満たすことを確認する．次に，歪みの小さい符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ を構成する．この構成では，既に構成された符号器 $\varphi_n^{(2)}$ を参照するため，符号器 $\varphi_n^{(1)}$ のうちの符号器 $\varphi_n^{(1-2)}$ の部分を構成しているといえることができる．最後に，符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ の符号化レート R_1 と事象 $X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \cap X^n \in \mathcal{D}^{(2)}$ の確率を評価することで，符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ が式 (20), (21) を満たすことを確認する．

4.1 歪みの大きい符号の構成

まず符号 $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ を構成し，性能を評価する．手順は先行研究 [2] と同じである．

(証明) $\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \triangleq \mathcal{B}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \cap \mathcal{S}_n^{(2)}(\mathbf{y})$ とおく．復号語を以下のように順次選んでいく．

最初に条件

$$P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y}) \geq e^{-n\gamma} \quad (22)$$

を満たす $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を 1 つ選びこれを最初の復号語 $\psi_n^{(2)}(1)$ とする．さらに，これに対する符号化領域を

$$(\varphi_n^{(2)})^{-1}(1) \triangleq \mathcal{T}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(1)) \quad (23)$$

とおく．以降 $k \geq 2$ に対し k 番目の復号語として

$$P_{X^n|Y_2^n}\left(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \setminus \bigcup_{k' < k} (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k') \mid \mathbf{y}\right) \geq e^{-n\gamma} \quad (24)$$

を満たす $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を 1 つ選び, $\psi_n^{(2)}(k)$ とする. さらに k 番目の符号化領域を

$$(\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \triangleq \mathcal{T}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(k)) \setminus \bigcup_{k' < k} (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k') \quad (25)$$

とする. 可能な限りこの操作を続け, 復号語を $M_n^{(2)}$ 個取れたとする. これで符号器 $\varphi_n^{(2)}$ と復号器 $\psi_n^{(2)}$ が完成した.

ここで $(\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)$, $k = 1, \dots, M_n^{(2)}$ が互いに素であることに注意すると $M_n^{(2)}$ の定義より任意の $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して

$$P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \setminus \mathcal{D}^{(2)} \mid \mathbf{y}) < e^{-n\gamma} \quad (26)$$

が成り立つことに注意しておく.

次に, 以上のように定義された $(\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)})$ 符号の性能を評価する. まず符号化レートを調べ, 式 (16) を導く. そのために任意の $k \in \mathcal{M}_n^{(2)}$ を考え, これに対して $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)$ を考える. すると式 (25) より $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(k))$ となる. さらに $\mathcal{T}_n^{(2)}(y)$ の定義より $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(k))$ となるため, 式 (15) より

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y_2^n}(\mathbf{x} \mid \psi_n^{(2)}(k))}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq R_2 - \gamma \quad (27)$$

といえる. 即ち $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)$ ならば

$$P_{X^n}(\mathbf{x}) \geq P_{X^n|Y_2^n}(\mathbf{x} \mid \psi_n^{(2)}(k)) e^{-n(R_2 - \gamma)} \quad (28)$$

が成り立つ。したがって

$$1 \geq P_{X^n}(\mathcal{D}^{(2)}) \quad (29)$$

$$\stackrel{(19)}{=} P_{X^n} \left(\bigcup_k (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \right) \quad (30)$$

$$\stackrel{(25)}{=} \sum_k P_{X^n} \left((\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \right) \quad (31)$$

$$= \sum_k \sum_{\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)} P_{X^n}(\mathbf{x}) \quad (32)$$

$$\stackrel{(28)}{\geq} \sum_k \sum_{\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)} P_{X^n|Y_2^n}(\mathbf{x} \mid \psi_n^{(2)}(k)) e^{-n(R_2-\gamma)} \quad (33)$$

$$= \sum_k P_{X^n|Y_2^n} \left((\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \mid \psi_n^{(2)}(k) \right) e^{-n(R_2-\gamma)} \quad (34)$$

$$\stackrel{(24)}{\geq} \sum_k e^{-n\gamma} \cdot e^{-n(R_2-\gamma)} \quad (35)$$

$$= \sum_k e^{-nR_2} \quad (36)$$

$$= M_n^{(2)} e^{-nR_2} \quad (37)$$

となり

$$\frac{1}{n} \log M_n^{(2)} \leq R_2 \quad (38)$$

が得られる。

次に式 (17) を導く。 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^{(2)}$ とすると、ある $k \in \mathcal{M}_n^{(2)}$ に対して $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)$ となる。したがって $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(k))$ となる。このとき、 $\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y})$ の定義から、 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(k))$ となる。一方 $\varphi_n^{(2)}(\mathbf{x}) = k$ なので $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(\mathbf{x})))$ となる。したがって

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\} \leq \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n)))\} \quad (39)$$

といえる。一方、任意の $\mathbf{y}$ について

$$P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y}) = P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \cap \mathcal{D}^{(2)} \mid \mathbf{y}) + P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) \setminus \mathcal{D}^{(2)} \mid \mathbf{y}) \quad (40)$$

$$\stackrel{(26)}{\leq} P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{D}^{(2)} \mid \mathbf{y}) + e^{-n\gamma} \quad (41)$$

となるので式 (39) の左辺は

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\} = P_{X^n}(\mathcal{D}^{(2)}) \quad (42)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} P_{X^n Y_2^n}(\mathcal{D}^{(2)}, \mathbf{y}) \quad (43)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} (P_{Y_2^n}(\mathbf{y}) P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{D}^{(2)} | \mathbf{y})) \quad (44)$$

$$\stackrel{(41)}{\geq} \sum_{\mathbf{y}} \{P_{Y_2^n}(\mathbf{y}) (P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) | \mathbf{y}) - e^{-n\gamma})\} \quad (45)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} P_{Y_2^n}(\mathbf{y}) P_{X^n|Y_2^n}(\mathcal{T}_n^{(2)}(\mathbf{y}) | \mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{y}} P_{Y_2^n}(\mathbf{y}) e^{-n\gamma} \quad (46)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} \Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(2)}(Y_2^n), Y_2^n = \mathbf{y}\} - e^{-n\gamma} \quad (47)$$

$$= \Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - e^{-n\gamma} \quad (48)$$

$$= \Pr\{X^n \in \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n) \text{ かつ } X^n \in \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - e^{-n\gamma} \quad (49)$$

$$= 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n) \text{ または } X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - e^{-n\gamma} \quad (50)$$

$$\geq 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - e^{-n\gamma} \quad (51)$$

となる． よって式 (39), (51) より

$$\begin{aligned} & \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n)))\} \\ & \geq 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n)\} - e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (52)$$

となるので

$$\begin{aligned} & \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(\psi_n^{(2)}(\varphi_n^{(2)}(X^n)))\} \\ & \leq \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(2)}(Y_2^n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(2)}(Y_2^n)\} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (53)$$

が導かれる．

4.2 歪みの小さい符号の構成

次に、符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ を構成し、性能を評価する．

まず、 $\mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \triangleq \mathcal{B}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \cap \mathcal{S}_n^{(1)}(\mathbf{y})$ とおく． 次に、各 $k \in \mathcal{M}_n^{(2)}$ に対して、復号語を以下のように順次選んでいく．

最初に条件

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \mid Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} \geq e^{-n\gamma} \quad (54)$$

を満たす $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を 1 つ選びこれを k に対する最初の復号語 $\psi_n^{(1)}(1, k)$ とする. また, これに対する符号化領域を

$$(\varphi_n^{(1)})^{-1}(1, k) \triangleq \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \psi_n^{(1)}(1, k)) \cap (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k) \quad (55)$$

とおく. 以降 k に対する m 番目 ($m \geq 2$) の復号語として

$$\Pr \left\{ X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \setminus \bigcup_{m' < m} (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m', k) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \right\} \geq e^{-n\gamma} \quad (56)$$

を満たす $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を 1 つ選び, $\psi_n^{(1)}(m, k)$ とする. さらに k に対する m 番目の符号化領域を

$$(\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k) \triangleq \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \psi_n^{(1)}(m, k)) \cap (\psi_n^{(2)})^{-1}(k) \setminus \bigcup_{m' < m} (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m', k) \quad (57)$$

とする.

ここで, 任意の $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)$ を考える. このとき, $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(2)})^{-1}(k)$ すなわち $\varphi_n^{(2)}(\mathbf{x}) = k$ を満たす. したがって, 符号器 $\varphi_n^{(1)}$ はある符号器 $\varphi_n^{(1-2)} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n^{(1-2)}$ を用いて $\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x}) = (\varphi_n^{(1-2)}(\mathbf{x}), \varphi_n^{(2)}(\mathbf{x}))$ と表せる. つまり, 以上の符号器 $\varphi_n^{(1)}$ の構成は, 実質的に符号器 $\varphi_n^{(1-2)}$ の構成であったという点に注意されたい.

次に, 各 k に対して復号語を可能な限り取り続け, $M_n^{(1)}(k)$ 個取れたとする. このとき

$$M_n^{(1)} \triangleq \sum_{k=1}^{M_n^{(2)}} M_n^{(1)}(k) \quad (58)$$

とすると, 合計して復号語を $M_n^{(1)}$ 個取ることができたといえる. これで符号器 $\varphi_n^{(1)}$ と復号器 $\psi_n^{(1)}$ が完成した.

以上の構成によると, 各 $k \in \mathcal{M}_n^{(2)}$ に対する $M_n^{(1)}(k)$ はそれぞれ異なる. ここで, 符号器 $\varphi_n^{(1)}$, すなわち符号器 $\varphi_n^{(1-2)}$ の構成に注意すれば, $\max_k M_n^{(1)}(k) = |\mathcal{M}_n^{(1-2)}|$ である. ゆえに, 一般に $M_n^{(1)}(k) \leq |\mathcal{M}_n^{(1-2)}|$ であるため, 式 (58) より $M_n^{(1)} \leq |\mathcal{M}_n^{(1-2)}| \times |\mathcal{M}_n^{(2)}|$ である点に注意してほしい.

また,

$$\mathcal{D}^{(1)}(k) \triangleq \bigcup_{m=1}^{M_n^{(1)}(k)} (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k) \quad (59)$$

とおくと, $(\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)$, $m = 1, \dots, M_n^{(1)}(k)$, $k = 1, \dots, M_n^{(2)}$ が互いに素であることに注意すれば, $M_n^{(1)}(k)$ の定義より任意の $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して

$$\Pr \left\{ X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \setminus \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| Y^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \right\} < e^{-n\gamma} \quad (60)$$

であることに注意しておく.

さらに符号 $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ の性能の評価に使うために

$$\mathcal{D}^{(1)} \triangleq \bigcup_{k \in \mathcal{M}_n^{(2)}} \mathcal{D}^{(1)}(k) \quad (61)$$

とおいておく.

次に, 以上のように定義された $(\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$ 符号の性能を評価する. まず符号化レートを調べ, 式 (20) を導く. そのために任意の $(m, k) \in \mathcal{M}_n^{(1-2)} \times \mathcal{M}_n^{(2)}$ に対して $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)$ を考える. すると式 (57) より $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \psi_n^{(1)}(m, k))$ となる. さらに $\mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y})$ の定義より $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_n^{(1)}(k, \psi_n^{(1)}(m, k))$ となるため式 (18) より

$$\frac{1}{n} \log \frac{\Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid Y_1^n = \psi_n^{(1)}(m, k), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\}}{\Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\}} \leq R_1 - R_2 - \gamma \quad (62)$$

といえる. 即ち $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)$ ならば

$$\begin{aligned} & \Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} \\ & \geq \Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid Y_1^n = \psi_n^{(1)}(m, k), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} e^{-n(R_1 - R_2 - \gamma)} \end{aligned} \quad (63)$$

が成り立つ. したがって

$$1 \geq \Pr\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} \quad (64)$$

$$\stackrel{(59)}{=} \Pr\left\{X^n \in \bigcup_m (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k) \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \quad (65)$$

$$\stackrel{(57)}{=} \sum_m \Pr\{X^n \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k) \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} \quad (66)$$

$$= \sum_m \sum_{\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)} \Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} \quad (67)$$

$$\stackrel{(63)}{\geq} \sum_m \sum_{\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)} \Pr\{X^n = \mathbf{x} \mid Y_1^n = \psi_n^{(1)}(m, k), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} e^{-n(R_1 - R_2 - \gamma)} \quad (68)$$

$$= \sum_m \Pr\{X^n \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k) \mid Y_1^n = \psi_n^{(1)}(m, k), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\} e^{-n(R_1 - R_2 - \gamma)} \quad (69)$$

$$\stackrel{(56)}{\geq} \sum_m e^{-n\gamma} \cdot e^{-n(R_1 - R_2 - \gamma)} \quad (70)$$

$$= \sum_m e^{-n(R_1 - R_2)} \quad (71)$$

$$= M_n^{(1)}(k) e^{-n(R_1 - R_2)} \quad (72)$$

となる。さらに

$$M_n^{(1)} \stackrel{(58)}{=} \sum_k M_n^{(1)}(k) \quad (73)$$

$$\stackrel{(72)}{\leq} \sum_k e^{n(R_1 - R_2)} \quad (74)$$

$$= M_n^{(2)} e^{n(R_1 - R_2)} \quad (75)$$

$$\stackrel{(37)}{\leq} e^{nR_2} \cdot e^{n(R_1 - R_2)} \quad (76)$$

$$= e^{nR_1} \quad (77)$$

より

$$\frac{1}{n} \log M_n^{(1)} \leq R_1 \quad (78)$$

が得られる。

次に式 (21) を導く。ある $k \in \mathcal{M}_n^{(2)}$ に対して $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^{(1)}(k)$ とすると、ある $m \in \mathcal{M}_n^{(1-2)}$ に対して $\mathbf{x} \in (\varphi_n^{(1)})^{-1}(m, k)$ となる。したがって $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \psi_n^{(1)}(m, k))$ となる。このとき、 $\mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y})$ の定義から $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(m, k))$ となる。一方 $\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x}) = (m, k)$ なので $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(\mathbf{x})))$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \\ \leq \Pr\left\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \end{aligned} \quad (79)$$

といえる。一方、任意の $\mathbf{y}$ について

$$\Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} &= \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \cap \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \\ &\quad + \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \setminus \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\stackrel{(60)}{\leq} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} + e^{-n\gamma} \quad (82)$$

となるので式 (79) の左辺は

$$\Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \quad (83)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k), Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \quad (84)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} \left(\Pr\left\{Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \right) \quad (85)$$

$$\stackrel{(82)}{\geq} \sum_{\mathbf{y}} \left\{ \Pr\left\{Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \cdot \left(\Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}) \middle| Y_1^n = \mathbf{y}, \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} - e^{-n\gamma} \right) \right\} \quad (86)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}), Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} - \sum_{\mathbf{y}} \Pr\left\{Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} e^{-n\gamma} \quad (87)$$

$$= \sum_{\mathbf{y}} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, \mathbf{y}), Y_1^n = \mathbf{y} \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} - e^{-n\gamma} \quad (88)$$

$$= \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, Y_1^n) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} - e^{-n\gamma} \quad (89)$$

となる。したがって

$$\Pr\left\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \quad (90)$$

$$\stackrel{(19)}{=} \sum_k \Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k, X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \quad (91)$$

$$= \sum_k \left(\Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \cdot \Pr\left\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k, X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \right) \quad (92)$$

$$\stackrel{(19)}{=} \sum_k \left(\Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \cdot \Pr\left\{X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n))) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \right) \quad (93)$$

$$\stackrel{(79)}{\geq} \sum_k \left(\Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{D}^{(1)}(k) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \right) \quad (94)$$

$$\stackrel{(89)}{\geq} \sum_k \left\{ \Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \cdot \left(\Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, Y_1^n) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} - e^{-n\gamma} \right) \right\} \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, Y_1^n) \middle| \varphi_n^{(2)}(X^n) = k\right\} \\
&\quad - \sum_k \Pr\left\{\varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\stackrel{(19)}{=} \sum_k \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(k, Y_1^n), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma} \tag{97}$$

$$= \sum_k \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n), Y_1^n), \varphi_n^{(2)}(X^n) = k \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma} \tag{98}$$

$$\stackrel{(19)}{=} \Pr\left\{X^n \in \mathcal{T}_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n), Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma} \tag{99}$$

$$= \Pr\left\{X^n \in \mathcal{B}_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n), Y_1^n) \text{ かつ } X^n \in \mathcal{S}_n^{(1)}(Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma} \tag{100}$$

$$= 1 - \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n), Y_1^n) \text{ または } X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 1 - \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n), Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \\
&\quad - \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} - e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{102}$$

となり

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(\psi_n^{(1)}(\varphi_n^{(2)}(X^n))) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} \\
&\leq \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{B}_n^{(1)}(\varphi_n^{(1)}(X^n), Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} + \Pr\left\{X^n \notin \mathcal{S}_n^{(1)}(Y_1^n) \middle| X^n \in \mathcal{D}^{(2)}\right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{103}$$

が導かれる。□

5 まとめ

本論文では、非ランダムな方法によって固定長スケラブル符号の構成を試みた。ただし、構成した符号がスケラブル符号化のレート歪み問題に対して良い符号であるかどうかはまだ分からない。今後の課題は、本論文で構成した符号 $(\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(1)}, \psi_n^{(2)})$ が (R_1, R_2, D_1, D_2) 達成可能かを考えることである。その際に、本論文での符号の構成方法の修正が必要となる可能性もある。先行研究 [2] では本論文における集合 $\mathcal{S}_n^{(2)}(\mathbf{y})$ にあたる集合を歪みに関する典型系列で定義することで、レート歪み達成可能の証明を行っている。この手法を参考にし、 $\mathcal{S}_n^{(1)}(\mathbf{y})$ を典型系列の形で考えることによって、レート歪み達成可能なスケラブル符号の存在を証明できる見通しである。

レート歪み達成可能が証明されるということは、レート歪み理論の順定理の証明されるということである。順定理の証明が完成した後は、逆定理の証明を完成させ、順定理と合わせることで、スケラブル符号化のレート歪み関数を定めることを目標としたい。

ちなみに、本論文での証明は最大歪みにおけるスケーラブル符号化のレート歪み問題を解くことに向けたものであるが、歪み規範には最大歪みのほかに平均歪みがある。また、スケーラブル符号化における受信者は、2人以上となることが想定される。将来的にはこれらのことを切り口にして、問題を拡張することも考えられる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Abbas El Gamal, Young-Han Kim, Network Information Theory, Cambridge University Press, 2011.
- [2] 伊藤佑樹, 西新幹彦, 「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」, 第 41 回情報理論とその応用シンポジウム SITA2018, 2018 年 12 月.
- [3] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.