

信州大学工学部

学士論文

離散無記憶通信路に対するコストあたり通信路容量の
算出における精度保証について

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電子情報システム工学科

学籍番号 17T2135H

氏名 伏屋 麟

2022 年 03 月 31 日

目次

1	はじめに	1
2	コストあたり通信路容量を算出するアルゴリズム	1
3	上界の設定	4
4	まとめ	5
	謝辞	6
	参考文献	6
	付録 A	6
	A.1 通信路容量を求めるアルゴリズムの上界の導出	6
	A.2 相互情報量の凸性	7
	A.3 入力確率分布が相互情報量を最大にする必要十分条件	8
	A.4 通信路容量に対して上界の収束証明	9

1 はじめに

通信システムとは、符号シンボルを送受信することによって情報を伝えるシステムである。一般に符号シンボルの送信にはコストがかかる。具体例として、電力や時間などがコストとされる。

通信システムによっては、シンボルのコストは同一である場合もあるが、一般的にはシンボルごとによって異なる。例えば、AWGN 通信路では、入力シンボルは任意の実数値であるが、多くの場合はその 2 乗が入力シンボルのコストとみなされる。パケット間隔を用いた通信では、送信間隔がコストとみなされる [1]。

情報理論における通信路符号化の問題では、通信路容量を求めることが基本的な問題となる。コストの概念のない通常の通信路符号化では、通信路容量は符号シンボルあたりの情報量という次元で定義される。コスト付き通信路符号化問題と呼ばれる符号シンボルにコストが定義されているような問題に、コストあたりの情報量という次元で定義されるコストあたり通信路容量を求める問題がある。

これに関して、Gallager[3] は、コスト制約付き通信路容量を制約付き最適化問題の最適解として明らかにし、Verdú[5] が、この結果を用いて、コストあたり通信路容量を制約付き最適化問題の最適解として明らかにしている。コストあたり通信路容量の数値的な計算については、従来研究を組み合わせることで一応計算可能ではあるが、Blahut[4] と有本 [6] が出している通信路容量を数値的に計算するアルゴリズムに変更を加えることでより効率的な計算が期待できる。そして、その変更を加えてコストあたり通信路容量を計算するアルゴリズムとして提案されたのが、川合西新 [1] 提案のアルゴリズムである。

現状として、川合西新提案アルゴリズムには算出値の精度を保証する手段が定められていない。よって、本研究では、算出値の精度を保証するためにコストあたり通信路容量を上から抑える試みをした。上界と算出値が近づくことによって算出値の精度が保証される。

2 コストあたり通信路容量を算出するアルゴリズム

本研究では、通信路は定常無記憶であると仮定する。通信路は、入力と出力をそれぞれ確率変数 X, Y としたとき、条件付き確率

$$W_{y|x} \triangleq \Pr\{Y = y | X = x\}, \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \quad (1)$$

によって表される．ただし, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ はそれぞれ通信路の入力アルファベットと出力アルファベットである．このことから

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} W_{y|x} = 1, \quad x \in \mathcal{X} \quad (2)$$

が成り立つ．また, 用いる通信路は定常無記憶通信路である．

入力分布 p_x は

$$\begin{aligned} p_x &\triangleq \Pr \{X = x\} \\ \sum_x p_x &= 1, \quad x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3)$$

で定義され, p_x を入力分布としたときの出力分布 q_y は

$$q_y = \sum_x p_x W_{y|x} \quad (4)$$

で表す．

また, 入力シンボル X , 出力シンボル Y に対し, X と Y の間の相互情報量を

$$I(X; Y) \triangleq \sum_{x,y} p_x W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \quad (5)$$

と定義し, X のエントロピーを

$$H(X) \triangleq \sum_x p_x \log \frac{1}{p_x} \quad (6)$$

と定義する．

X と Y の間の相互情報量は

$$I(X; Y) = H(X) + \sum_x p_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{p_x W_{y|x}}{q_y} \quad (7)$$

とも表される．

ここで, コストの概念を導入する．各符号シンボル $x \in \mathcal{X}$ に対して, 実数 $c(x) > 0$ を定め, これを x のコストという．分布 p に従ってシンボルを入力したときのコストの期待値 E_p は

$$E_p = E[c(X)] = \sum_x c(x) p_x \quad (8)$$

で表される．

コストあたり通信路容量 C は,

$$C = \sup_X \frac{I(X; Y)}{E[c(X)]} = \sup_X \frac{I(X; Y)}{E_p} \quad (9)$$

と表される [5].

このコストあたり通信路容量を数値的に計算するアルゴリズムとして以下のようなアルゴリズムが知られている [1].

相互情報量を拡張した概念として, 次の

$$I_c(p; \varphi) \triangleq \frac{1}{E_p}(H(X) + \sum_x p_x \sum_y W_{y|x} \log \varphi_{x|y}) \quad (10)$$

をコストあたり相互情報量として定義する. ここで用いた出力から入力への遷移確率行列 $\varphi = \{\varphi_{x|y}\}_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ は条件

$$\sum_x \varphi_{x|y} = 1, \quad y \in \mathcal{Y} \quad (11)$$

を満たすよう定義される.

このアルゴリズムはループの構造を持ち, ループ回数を N とおく. また, ループ回数が増えるごとに変化していく記号には, 右上にループ回数を表記する. 例として, $\mathbf{p}^{(1)} = \{p_x^{(1)}\}$ は, $\{N = 1\}$ 回目のループで用いられる記号である.

1. 初期入力分布 $\mathbf{p}^{(1)} = \{p_x^{(1)}\}$ を内点にとる. 一様分布

$$p_x^{(1)} = \frac{1}{|\mathcal{X}|}, x \in \mathcal{X} \quad (12)$$

としてよい [2].

2. $N = 1$ とする.
3. $\mathbf{p}^{(N)}$ に対して $\sup_{\varphi} I_c(\mathbf{p}^{(N)}; \varphi)$ を達成する φ を求める. 具体的には, これを $\varphi^{(N)} = \{\varphi_{xy}^{(N)}\}$ とし,

$$\varphi_{xy}^{(N)} = \frac{p_x^{(N)} W_{y|x}}{q_y^{(N)}} \quad (13)$$

とする.

4. $\varphi^{(N)}$ に対して $\sup_p I_c(p; \varphi^{(N)})$ を達成する $\mathbf{p}$ を求める. 具体的には, これを $\mathbf{p}^{(N+1)} = \{p_x^{(N+1)}\}$ とし,

$$p_x^{(N+1)} = \exp\left(\sum_y W_{y|x} \log \varphi_{x|y}^{(N)} - \alpha^{(N)} c(x)\right) \quad (14)$$

とする. ただし $\alpha^{(N)}$ は,

$$\sum_x \exp\left(\sum_y W_{y|x} \log \varphi_{x|y}^{(N)} - \alpha^{(N)} c(x)\right) = 1 \quad (15)$$

を満たす実数解である.

5. N を 1 増やして 3. に戻る.

以上より得られる

$$\sup_{\boldsymbol{\varphi}} I_c(\mathbf{p}^{(N)}; \boldsymbol{\varphi}) = I_c(\mathbf{p}^{(N)}; \boldsymbol{\varphi}^{(N)}) \quad (16)$$

および

$$\sup_{\mathbf{p}} I_c(\mathbf{p}; \boldsymbol{\varphi}^{(N)}) = I_c(\mathbf{p}^{(N+1)}; \boldsymbol{\varphi}^{(N)}) \quad (17)$$

はコストあたり通信路容量 C に収束する値となる．したがって，ループの回数 N を十分大きくすることによって誤差の小さい値が得られる．

3 上界の設定

基礎となった有本-Blahut アルゴリズム [4][6] は川合西新提案のアルゴリズム同様，算出中に $\mathbf{p}^{(N)}, \boldsymbol{\varphi}^{(N)}$ の 2 変数を交互に最大化し，下からコストあたり通信路容量に算出値を近づけている．また，有本-Blahut アルゴリズムでは，コストあたり通信路容量を上から抑えることのできる値を求め，ループ回数が増えると下界である算出値との差が小さくなっていくことを利用して，算出値が十分にコストあたり通信路容量に近づいたことを保証している．よって，川合西新提案のコストあたり通信路容量を求めるアルゴリズムでも同じ手法を用いる．

算出値が真のコストあたり通信路容量となる最適な入力をした時の値は以降,*付きで表す．

特に，最適な入力分布 p^* を用いると，コストあたり通信路容量は，

$$C = \frac{1}{E_p^*} \left(\sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x^* W_{y|x}} \right) \quad (18)$$

と書き換えられる．また, q_y と q_y^* の間のダイバージェンスを

$$D(\mathbf{q}^* \parallel \mathbf{q}) \triangleq \sum_y q_y^* \log \frac{q_y^*}{q_y} \quad (19)$$

と定義する．コストあたり通信路容量を変形すると

$$C = \frac{1}{E_p^*} \left\{ \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{\sum_x p_x W_{y|x}}{\sum_x p_x^* W_{y|x}} + \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \right\} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{E_p^*} \left\{ -\sum_y q_y^* \log \frac{q_y^*}{q_y} + \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \right\} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{E_p^*} \left\{ -D(\mathbf{q}^* \parallel \mathbf{q}) + \sum_x p_x^* \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \right\} \quad (22)$$

となり, $D(\mathbf{q}^* \parallel \mathbf{q})$ は非負であるため,

$$C \leq \frac{1}{E_p^*} \left\{ \sum_x p_x^* \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \right\} \quad (23)$$

$$\leq \frac{1}{E_p^*} \left\{ \max_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \right\} \quad (24)$$

となる. これはコストあたり通信路容量を上から抑える値である.

しかし, 式 (24) は未知の値を含み, そのままでは使用できない. 算出中のコストの期待値 $\frac{1}{E_p}$ とコストあたり通信路容量となるような最適な入力をした際のコストの期待値 $\frac{1}{E_p^*}$ の大小関係が不明であり, 既知の値のみで上界を表現出来ない. だが, $\frac{1}{E_p} \geq \frac{1}{E_p^*}$ であれば, 式 (22) を $\frac{1}{E_p}$ を使って上から抑えることが出来る. よって, $\frac{1}{E_p} \geq \frac{1}{E_p^*}$ の時,

$$C \leq \frac{1}{E_p} \left\{ \max_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \right\} \quad (25)$$

となる.

任意の入力分布 p_x に対して,

$$I_0(X = x; Y) \triangleq \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{q_y} \quad (26)$$

とおく. これを用いて,

$$I_U \triangleq \frac{1}{E_p} \left\{ \max_x I_0(X = x; Y) \right\}, \quad \frac{1}{E_p} \geq \frac{1}{E_p^*} \quad (27)$$

と I_U を定義し, 条件成立時にコストあたり通信路容量 C の上界となる.

4 まとめ

本研究では, コストあたり通信路容量を数値的に計算するアルゴリズムの精度保証方法を, 通信路容量を数値的に計算するアルゴリズムである有本-Blahut アルゴリズムに基づいて提案した. 求めることが出来たのは $\frac{1}{E_p} \geq \frac{1}{E_p^*}$ の時に $C \leq \frac{1}{E_p} \left\{ \sup_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \right\}$ が成立することであり, $\frac{1}{E_p} < \frac{1}{E_p^*}$ の時はどうなるのかはわかっていない.

本来であれば, 求めた上界がコストあたり通信路容量に収束することを示したいが, 現時点ではできなかったため, 付録にコストを考慮しない場合の上界の収束を証明を記す.

また, コストの期待値の大小関係がループ回数に伴って, どのように変化するのか不明なため, この条件が適用できる範囲が実用的であるかもわかっていない. これについては, 今後の課題である.

謝辞

本研究を進めるにあたり、丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] 川合康太, 西新幹彦「離散無記憶通信路に対するコストあたり通信路容量の算出に関する考察」, The 42nd Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2019), pp.117–122, 2019.
- [2] 有本卓, 情報理論, 共立出版, 1976.
- [3] Robert G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley & Sons, 1968.
- [4] Richard E. Blahut, “Computation of Channel Capacity and Rate-Distortion Functions,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-18, no.4, pp.460–473, Jul. 1972.
- [5] Sergio Verdú, “On Channel Capacity per Unit Cost,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.36, no.5, pp.1019–1030, Sep.1990.
- [6] Suguru Arimoto, “An Algorithm for Computing the Capacity of Arbitrary Discrete Memoryless Channels,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-18, no.1, pp.14–20, Jan. 1972.

付録 A

A.1 通信路容量を求めるアルゴリズムの上界の導出

3 章の参考となった通信路容量を求めるアルゴリズムの上界の導出を示す [6].
通信路容量 C は,

$$C = \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x^* W_{y|x}} \quad (28)$$

と表される。

通信路容量 C を変形すると,

$$C = \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{\sum_x p_x W_{y|x}}{\sum_x p_x^* W_{y|x}} + \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (29)$$

$$= -\sum_y q_y^* \log \frac{q_y^*}{q_y} + \sum_x \sum_y p_x^* W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (30)$$

$$= -D(\mathbf{q}^* \parallel \mathbf{q}) + \sum_x p_x^* \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (31)$$

となり, $D(\mathbf{q}^* \parallel \mathbf{q})$ は非負であるため,

$$C \leq \sum_x p_x^* \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (32)$$

$$\leq \max_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (33)$$

となる. これは通信路容量を上から抑える値である. よって,

$$I_U = \max_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (34)$$

は上界である.

A.2 相互情報量の凸性

ここでは, 相互情報量が凸性を持つことを示す.[2] 多次元確率ベクトルとして,

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_x\} \quad (35)$$

とする.

相互情報量は, $\mathbf{p}$ の関数として見る事が出来,

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{x,y} p_x W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (36)$$

とする.

また, $\mathbf{p}$ と同様の任意のベクトルとして, $\mathbf{r}, \mathbf{s}$, 任意の数として $\theta (0 < \theta < 1)$ を置く. そのとき,

$$f(\theta \mathbf{r} + (1 - \theta) \mathbf{s}) = \sum_{x,y} (\theta r_x + (1 - \theta) s_x) W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x (\theta r_x + (1 - \theta) s_x) W_{y|x}} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x,y} (\theta r_x + (1 - \theta) s_x) W_{y|x} \log W_{y|x} \\ &\quad - \sum_{x,y} (\theta r_x + (1 - \theta) s_x) W_{y|x} \log \sum_x (\theta r_x + (1 - \theta) s_x) W_{y|x} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x,y} \theta r_x W_{y|x} \log W_{y|x} + \sum_{x,y} (1 - \theta) s_x W_{y|x} \log W_{y|x} \\ &\quad - \sum_y \left\{ \sum_x \theta r_x W_{y|x} + \sum_x (1 - \theta) s_x W_{y|x} \right\} \log \left\{ \sum_x \theta r_x W_{y|x} + \sum_x (1 - \theta) s_x W_{y|x} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

ここで,

$$\alpha = \sum_x r_x W_{y|x} \quad , \quad \beta = \sum_x s_x W_{y|x} \quad (40)$$

と置くと,

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (41)$$

であり, 関数 $-x \log x$ は区間 $(0,1)$ において上に凸の関数として知られている. よって,

$$-(\theta \alpha + (1 - \theta) \beta) \log(\theta \alpha + (1 - \theta) \beta) \geq -\theta \alpha \log \alpha - (1 - \theta) \beta \log \beta \quad (42)$$

となる. これを (39) に代入し,

$$\begin{aligned} f(\theta \mathbf{r} + (1 - \theta) \mathbf{s}) &\geq \theta \sum_{x,y} r_x W_{y|x} \log W_{y|x} + (1 - \theta) \sum_{x,y} s_x W_{y|x} \log W_{y|x} \\ &\quad - \sum_y \left\{ \theta \sum_x r_x W_{y|x} \log \sum_x r_x W_{y|x} - (1 - \theta) \sum_x s_x W_{y|x} \log \sum_x s_x W_{y|x} \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

$$= \theta f(\mathbf{r}) + (1 - \theta) f(\mathbf{s}) \quad (44)$$

となり, 関数 $f(\mathbf{p})$ は上に凸である条件を満たす.

A.3 入力確率分布が相互情報量を最大にする必要十分条件

ここでは, 入力確率分布によって相互情報量が通信路容量と等しくなるための必要十分条件を求める.

付録 A.2 において $f(\mathbf{p})$ が上に凸な関数であることが証明されたので, KT 条件 [2] が適用できる.

ある $\mathbf{p}$ において, $f(\mathbf{p})$ が最大になったと仮定する. 式 (28) より $C = f(\mathbf{p})$ である. KT 条件からある λ が存在して,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_x} = \lambda & p_x > 0 \\ \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_x} \leq \lambda & p_x = 0 \end{cases} \quad (45)$$

となる. ここで, 偏微分を実行すると

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_x} = \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} - \sum_{x,y} p_x W_{y|x} \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (46)$$

$$= \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} - 1 \quad (47)$$

となる. 両辺に p_x をかけ, x について和をとると

$$\sum_x p_x \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_x} = -1 + \sum_{x,y} p_x W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (48)$$

$$\lambda = -1 + f(\mathbf{p}) \quad (49)$$

$$= -1 + C \quad (50)$$

(50) を (45) に代入すると

$$\begin{cases} \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} = C & p_x > 0 \\ \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \leq C & p_x = 0 \end{cases} \quad (51)$$

が得られ, これは入力確率分布 $\mathbf{p}$ が $f(\mathbf{p})$ を最大にするための必要十分条件である.

A.4 通信路容量に対して上界の収束証明

ここでは, 付録 A.1 で求めた上界 I_U が通信路容量に収束することを示す.

式 (51) 左辺を $\mathbf{p}$ の関数として

$$g_x(\mathbf{p}) = \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x W_{y|x}} \quad (52)$$

とおく. 付録 A.2 同様に, 任意ベクトル $\mathbf{r}, \mathbf{s}$, 任意の数として $\theta (0 < \theta < 1)$ を用いると

$$g_x(\theta \mathbf{r} + (1 - \theta) \mathbf{s}) = \sum_y W_{y|x} \log W_{y|x} - \sum_y W_{y|x} \log \left(\theta \sum_x r_x W_{y|x} + (1 - \theta) \sum_x s_x W_{y|x} \right) \quad (53)$$

となる. $\log x$ の関数は区間 $(0, 1)$ で上に凸であることが知られているため,

$$\begin{aligned} & - \sum_y W_{y|x} \log \left(\theta \sum_x r_x W_{y|x} + (1 - \theta) \sum_x s_x W_{y|x} \right) \leq \\ & - \theta \sum_y W_{y|x} \log \sum_x r_x W_{y|x} - (1 - \theta) \sum_y W_{y|x} \log \sum_x s_x W_{y|x} \end{aligned} \quad (54)$$

となり, 整理すると

$$g_x(\theta \mathbf{r} + (1 - \theta) \mathbf{s}) \geq \theta g_x(\mathbf{r}) + (1 - \theta) g_x(\mathbf{s}) \quad (55)$$

が得られ, $g_x(\mathbf{p})$ は上に凸であることがわかる. 凸関数の性質から, $g_x(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ に関して連続性を持つ. 上界 I_U は (34) より $\mathbf{p}$ の関数として

$$I_U(\mathbf{p}) = \max_x g_x(\mathbf{p}) \quad (56)$$

と書けるので $\mathbf{p}$ に関して連続であるといえる.

また, 最適入力 $\mathbf{p}^*$ に対する上界 $I_U(\mathbf{p}^*)$ は (51) より

$$I_U(\mathbf{p}^*) = \max_x \sum_y W_{y|x} \log \frac{W_{y|x}}{\sum_x p_x^* W_{y|x}} \quad (57)$$

となり, 通信路容量と等しくなる. よって, 付録 A.1 で求めた上界 I_U は通信路容量に収束することがわかる.