

信州大学工学部

学士論文

一般情報源に対する観測値に雑音があるシステムの  
平均歪み制約レート歪み理論

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電子情報システム工学科  
学籍番号 18T2038K  
氏名 金子 歩夢

2022 年 3 月 31 日

## 目次

|     |                                          |   |
|-----|------------------------------------------|---|
| 1   | はじめに                                     | 1 |
| 2   | レート歪み理論                                  | 1 |
| 2.1 | 固定長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 $R_{fa}$ . . . . . | 2 |
| 2.2 | 可変長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 $R_{va}$ . . . . . | 3 |
| 3   | 観測値に雑音のあるシステムのレート歪み理論                    | 4 |
| 3.1 | 固定長平均歪みのもとでのレート歪み理論 . . . . .            | 5 |
| 3.2 | 可変長平均符号化のもとでのレート歪み理論 . . . . .           | 7 |
| 4   | まとめ                                      | 9 |
|     | 謝辞                                       | 9 |
|     | 参考文献                                     | 9 |

## 1 はじめに

データは完璧に送らなくて良い場合がある．元の情報と受信者が受け取る情報に歪みを許容すれば，符号化レートが下げられる．例えば，音声を届ける時は，データサイズが大きいので聞いたときに影響の少ない音を省き送信する．元のデータと届いたデータの差異を歪みという．この時，歪みと符号化レートはトレードオフの関係にある．この関係を明らかにするのがレート歪み問題である [1]．

一方，近年，IoT の進化がモノとインターネットをつなげ，今では家庭やオフィスビル，工場，さらには都市まで，ありとあらゆるものがネットワークにつながるようになった．データを収集し活用する上で，重要な役割を担っているのがセンサである．センサによって，あらゆる場でデータが収集されさまざまな領域に利用され，離れたモノの状態を計測したり，モノと受信機間の電波強度を測ることにより大まかな距離を知ることができる．しかし，センサの性能や感度などにより情報を得るときに，正確には観測できずいくらかノイズが含まれた形で観測される場合がある．また，データが届けられるときにノイズが入る場合もある．従来研究では，定常無記憶情報源に雑音を加えられた場合と受信者にデータが届く前に雑音を加えられた場合の2か所に雑音が入るレート歪みの関係が明らかになっている．そこで本研究では，一般情報源に雑音を加えられた場合と受信者にデータが届く前に雑音を加えられた場合のレートと歪みの関係について考察した．また，固定長符号化と可変長符号化の2種類の符号化それぞれのレート歪み理論について扱う．

本論文は次のような章から構成される．2章では一般情報源のレート歪み理論について述べる [2]．3章では雑音がある場合のレート歪み理論を述べる [3]．最後に4章で本論文をまとめる．

## 2 レート歪み理論

ここでは，一般情報源に対する通常のレート歪み理論について述べる． $\mathbf{X} = \{X^n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$  を一般情報源として，情報源アルファベットを  $\mathcal{X}$ ，復号アルファベットを  $\mathcal{Y}$  とする．一般情報源とは，定常無記憶情報源を一般化したものであり，送った情報はその前後に送った情報とは独立とは限らないし，一様分布でもない．長さ  $n$  の系列に対する歪み測度を関数  $d_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow [0, +\infty)$  と定め， $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n)$  を  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の間の歪みと呼ぶ．すると，情報源1文字あたりの歪みは

$$\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad (1)$$

で与えられる．歪み測度の列を  $\mathbf{d} \triangleq \{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  と表す．この問題設定をモデル化したものを図 1 に示す．

**定義 1**  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  の平均歪みを

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] \quad (2)$$

と定義する．

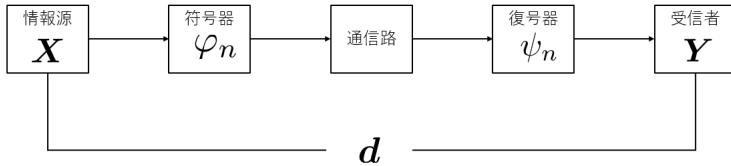


図 1 雑音のない通信モデル

次に，一般情報源のもとでの固定長符号化と可変長符号化の達成可能性を定義する．

## 2.1 固定長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 $R_{fa}$

本節では次のような符号化を考える．シンボルごとに割り当てる符号語の長さは同じとする．具体的には，歪み測度  $\mathbf{d}$  が与えられたときの情報源  $\mathbf{X}$  の符号化は次のように行う．  $M_n$  個の符号語の集合を  $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$  とする．そして，符号化を符号器  $\varphi_n: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$  によって定め，復号化を復号器  $\psi_n: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{Y}^n$  によって定める．情報源の出力  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$  は符号器  $\varphi_n$  によって符号化されたあと復号器  $\psi_n$  によって復元される．このような符号化を固定長符号化と呼ぶ．歪み制約については，平均歪みを用いる．このように，固定長符号化を行ったもとで，平均歪みによって歪み制約するシステムを固定長平均歪みと呼ぶことにする．

**定義 2**  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  を歪み測度  $\mathbf{d}$  で測るときレート  $R$  は  $D$ -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] \leq D \quad (3)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (4)$$

を満たす符号  $(\psi_n, \varphi_n)$  が存在することである．ただし， $Y^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$  である．

**定義 3** 固定長平均歪みのレート歪み関数を

$$R_{fa}(D) \triangleq \inf\{R | \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } d \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (5)$$

と定義する.

**定義 4** 確率的上限を

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \triangleq \inf\{\alpha | \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\} \quad (6)$$

と定義する.

**定義 5**  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  に対して

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n | X^n}(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (7)$$

を定義する. ここでは  $P_{Y^n | X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  は  $X^n = \mathbf{x}$  が与えられたときの  $Y^n = \mathbf{y}$  の条件付き確率を表す.

定義 1 の式 (2) で定義された  $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  と定義 5 の式 (7) で定義された  $\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  を用いると次の定理を得ることが知られている.

**定理 1** ([1]) 一般情報源  $\mathbf{X}$  に対する固定長平均歪みのレート歪み関数は

$$R_{fa}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (8)$$

で与えられる.

## 2.2 可変長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 $R_{va}$

本節では次のような符号化を考える. 符号器は符号化関数  $\varphi_n: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{U}^*$  で定められる可変長符号器である. ただし,  $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, K\}$  は符号アルファベットであり,  $\varphi_n(\mathcal{X}^n)$  は語頭符号をなすものとする. 復号器は復号化関数  $\psi_n: \mathcal{U}^* \rightarrow \mathcal{Y}^n$  によって定められる. 可変長符号化は 1 つ 1 つの情報源によって長さが異なるため, 情報源 1 文字あたりの平均符号語長は  $\frac{1}{n} \mathbb{E}[|\varphi_n(X^n)|]$  と表す. ただし,  $|\varphi_n(X^n)|$  は符号語  $\varphi_n(X^n)$  の長さを表す. ここでは, 可変長符号化を行ったもとで平均歪みによって歪みを制約するシステムを考える. このようなシステムを可変長平均歪みと呼ぶことにする.

**定義 6**  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  を歪み測度  $d$  で測るときレート  $R$  は  $D$ -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] \leq D \quad (9)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [|\varphi_n(X^n)|] \leq R \quad (10)$$

を満たす符号  $(\psi_n, \varphi_n)$  が存在することである。ただし、 $Y^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$  である。

**定義 7** レート歪み関数を

$$R_{va}(D) \triangleq \inf \{ R | \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } d \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能} \} \quad (11)$$

と定義する。

**定義 8**  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  に対して

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \log \frac{P_{Y^n|X^n}(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \right] \quad (12)$$

を定義する。

式 (2) で定義した  $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  と式 (12) で定義された  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  を用いると次の定理が成り立つことが知られている。

**定理 2** ([1]) 一般情報源  $\mathbf{X}$  に対する可変長平均歪みのレート歪み関数は

$$R_{va}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (13)$$

で与えられる。

### 3 観測値に雑音のあるシステムのレート歪み理論

情報源から出力されたシンボルは符号器  $\varphi_n$  に入力される前に雑音の影響を受けるとする。また、復号器  $\psi_n$  で復号された情報が受信者に届く前にも雑音に加わるモデルを考える。 $\mathbf{X} = \{X^n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$  を一般情報源とし、情報源アルファベットを  $\mathcal{X}$ 、復号アルファベットを  $\mathcal{Y}$  とする。情報源から出力される系列  $X^n$  は符号器  $\varphi_n$  に届く前に  $\tilde{X}^n$  に変換される。この変換は、確率  $P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x})$  で行われる。 $\tilde{X}^n$  は符号器  $\varphi_n$  で符号化され、通信路を通り復号器  $\psi_n$  へと送られる。このとき、通信路は正確に符号語を届けると考える。復号器  $\psi_n$  へと送られた符号語は、復号され  $\tilde{Y}^n$  となる。さらに、 $\tilde{Y}^n$  は雑音に加わるため  $Y^n$

へと確率  $P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}})$  で変換され受信者の元へ送られる。受信者に届いたものを  $Y^n$  とする。この問題をモデル化したものを図 2 に示す。

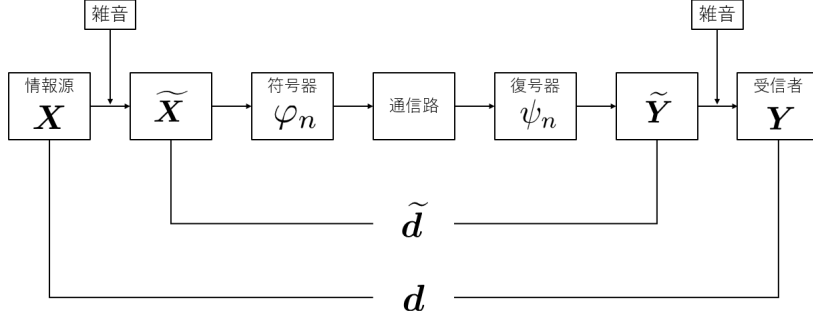


図 2 通信モデル

このとき  $x$  と  $y$  の間の歪みを  $d_n(x, y) (x \in \mathcal{X}^n, y \in \mathcal{Y}^n)$  とする。この歪み測度  $d_n$  で情報源  $X$  と受信者が受け取る情報  $Y$  がどれだけ似ているかを測る。これを用いて達成可能かどうか判断しレート歪み関数を数学的に示す。

### 3.1 固定長平均歪みのもとでのレート歪み理論

ここでは、固定長符号化を用いた雑音のあるシステムのレート歪み理論について考える。符号化は 2.1 節と同様の固定長符号化を行う。

**定義 9** 雑音のもとで  $X$  と  $Y$  を歪み測度  $d$  で測るときレート  $R$  は  $D$ -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] \leq D \quad (14)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (15)$$

となるような符号  $(\psi_n, \varphi_n)$  が存在することである。ただし、 $M_n$  は符号語数である。

**定義 10** レート歪み関数を

$$R'_{fa}(D) \triangleq \inf \{ R \mid \text{雑音のもとで } X \text{ と } Y \text{ を歪み測度 } d \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能} \} \quad (16)$$

と定義する。

定義 11  $\tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) (\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n, \tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{Y}^n)$  を

$$\tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \triangleq \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n|\tilde{X}^n}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (17)$$

と定義する.  $\mathbf{X}$  から  $\mathbf{Y}$  に至る過程で 2 ヶ所で雑音が混入するが, この歪み測度は, 雑音の影響を歪みとして繰り入れた上で  $\tilde{\mathbf{X}}$  と  $\tilde{\mathbf{Y}}$  の間の歪みを測るために定義される.

定義 12  $\tilde{\mathbf{d}}$  には雑音と歪み測度  $\mathbf{d}$  が含まれている. この雑音がある場合の平均歪みを

$$\tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] \quad (18)$$

と定義する.

定理 3 雑音がある場合のレート歪み関数は

$$R'_{fa}(D) = \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} \bar{I}(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (19)$$

で与えられる. ここで,  $\tilde{X}$  は  $P_{\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{x}} P_X(\mathbf{x}) P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x})$  に従い,  $\tilde{Y}^n$  は  $\tilde{X}^n$  と関連のある確率変数である.

証明 定義 11 の式 (17) の  $\tilde{d}_n$  の期待値は

$$\mathbb{E}[\tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] = \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{x}}) P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \quad (20)$$

となる. 一方,  $d_n$  の期待値は

$$\mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] = \sum_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{X^n, \tilde{X}^n, Y^n, \tilde{Y}^n}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (21)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{X^n}(\mathbf{x}) P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (22)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n, \tilde{X}^n}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (23)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \quad (24)$$

$$= \mathbb{E}[\tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] \quad (25)$$

となる．したがって，定義 9 は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] \leq D \quad (26)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (27)$$

と書き直すことができる．すると，この問題設定は図 3 のようになる．

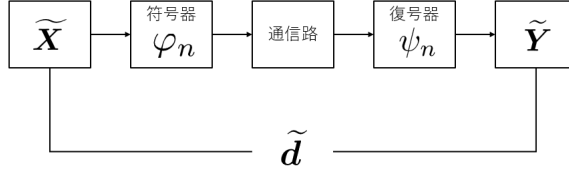


図 3 雑音のない通信モデル

これは 2.1 章で扱った雑音のないときの問題設定と同じであり，達成可能も同じことを表している．このことから，式 (16) の右辺は

$$\inf\{R \mid \text{雑音のもとで } \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } \mathbf{d} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (28)$$

$$= \inf\{R \mid \tilde{\mathbf{X}} \text{ と } \tilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \tilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (29)$$

となる．定理 1 の  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{d}$  を  $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{d}}$  と読み替えば

$$\inf\{R \mid \tilde{\mathbf{X}} \text{ と } \tilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \tilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (30)$$

$$= \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} \bar{I}(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (31)$$

となる．これらの関係をまとめると

$$R'_{fa}(D) = \inf\{R \mid \text{雑音のもとで } \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } \mathbf{d} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (32)$$

$$= \inf\{R \mid \tilde{\mathbf{X}} \text{ と } \tilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \tilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (33)$$

$$= \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} \bar{I}(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (34)$$

となる．ただし情報源  $\tilde{\mathbf{X}}$  は  $P_{\tilde{\mathbf{X}}^n}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_x P_X(x) P_{\tilde{\mathbf{X}}^n | X^n}(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{x})$  に従う確率変数である．□

### 3.2 可変長平均符号化のもとでのレート歪み理論

ここでは，可変長符号化を用いた雑音のあるシステムのレート歪み理論について考える．符号化は 2.2 節と同様の符号化を行う．

**定義 13** 雑音のもとで  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  を歪み測度  $\mathbf{d}$  で測るときレート  $R$  は  $D$ -達成可能 とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] \leq D \quad (35)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [|\varphi_n(\tilde{X}^n)|] \leq R \quad (36)$$

を満たす符号  $(\psi_n, \varphi_n)$  が存在することである.

**定義 14** レート歪み関数を

$$R'_{va}(D) \triangleq \inf\{R \mid \text{雑音のもとで } \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } \mathbf{d} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (37)$$

と定義する.

**定理 4** 雑音がある場合のレート歪み関数は,

$$R'_{va}(D) = \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} I(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (38)$$

となる.

**証明** 式 (25) を用いると定義 13 の式 (35) と (36) は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] \leq D \quad (39)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [|\varphi_n(\tilde{X}^n)|] \leq R \quad (40)$$

と書き直すことができる. すると, この問題設定は図 3 のようになる. これは 2.2 章で扱った雑音のないときの問題設定と同じであり, 達成可能も同じことを表している. このことから, 式 (37) の右辺は

$$\inf\{R \mid \text{雑音のもとで } \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } \mathbf{d} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (41)$$

$$= \inf\{R \mid \tilde{\mathbf{X}} \text{ と } \tilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \tilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (42)$$

となる. 定理 2 の  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{d}$  を  $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{d}}$  と読み替えれば

$$\inf\{R \mid \tilde{\mathbf{X}} \text{ と } \tilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \tilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能}\} \quad (43)$$

$$= \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} I(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (44)$$

となる．これらの関係をまとめると

$$R'_{va}(D) = \inf \{ R \mid \text{雑音のもとで } \mathbf{X} \text{ と } \mathbf{Y} \text{ を歪み測度 } \mathbf{d} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能} \} \quad (45)$$

$$= \inf \{ R \mid \widetilde{\mathbf{X}} \text{ と } \widetilde{\mathbf{Y}} \text{ を歪み測度 } \widetilde{\mathbf{d}} \text{ で測るときレート } R \text{ は } D\text{-達成可能} \} \quad (46)$$

$$= \inf_{\widetilde{\mathbf{Y}}: \widetilde{D}(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}) \leq D} I(\widetilde{\mathbf{X}}; \widetilde{\mathbf{Y}}) \quad (47)$$

となる．ただし情報源  $\widetilde{\mathbf{X}}$  は  $P_{\widetilde{\mathbf{X}}^n}(\widetilde{\mathbf{x}}) = \sum_x P_X(x) P_{\widetilde{\mathbf{X}}^n | X^n}(\widetilde{\mathbf{x}} | \mathbf{x})$  に従う確率変数である．□

## 4 まとめ

本研究では，一般情報源に対して 2 か所に雑音が入ることでデータが異なる場合のレート歪み問題を固定長平均歪み符号化と可変長平均歪み符号化の 2 パターンで考えた．その結果，雑音がある通信モデルの場合でも雑音のない通信モデルに帰着することにより，レート歪み関数を求めることができた．

## 謝辞

本研究を行うにあたり，丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

## 参考文献

- [1] 韓 太舜，情報理論における情報スペクトル的方法，培風館，1998．
- [2] 伊藤祐樹，「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」，信州大学工学部卒業論文（指導教員：西新幹彦），2019 年 3 月．
- [3] 澤田真子，「観測値に雑音のあるシステムのレート・歪み関数の数値計算と基礎的考察」，信州大学工学部卒業論文（指導教員：西新幹彦），2020 年 2 月．