

信州大学工学部

学士論文

劣公平なオッズの競馬に対する戦略の最適性の証明

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電気電子工学科

学籍番号 12T2057D

氏名 中川 勇斗

2016 年 2 月 20 日

目次

1	はじめに	1
2	競馬の定式化と基礎的考察	1
2.1	定式化	1
2.2	公平・優公平の場合の最適戦略	3
2.3	劣公平の場合の基礎的考察	4
3	最適解を求めるアルゴリズムとその最適性	6
3.1	最適解を求めるアルゴリズム	6
3.2	最適性の証明	7
3.3	アルゴリズムの解釈	9
4	まとめ	11
	謝辞	11
	参考文献	11

1 はじめに

競馬とは、騎手が乗った馬の着順を賭け師が予想するギャンブルである。今日、世界各国で最も人気のあるスポーツのひとつとして親しまれている近代競馬の形態が整えられたのは英国である。日本での最初の競馬は江戸時代末期にアメリカによって鎖国が解かれ、横浜に設けられた外国人居留地で行われたとされている [1]。

競馬における資金の成長率と競馬のエントロピーレートの間には強い双対性が存在する。競馬だけでなく株式市場における株式投資における資金の成長率と、市場のエントロピーレートにも双対性が存在している。競馬と株式投資は仕組みが似ているため競馬に対する解析手法は株式投資を解析する基礎となる。本論文では胴元がオッズを設定し、 m 頭が出走するレースで 1 着になる馬を賭け師が予想する競馬を考える。そのもとで賭け師のレース後の資金の成長率が最大となる賭け方を最適化問題として捉え、その最適解を考える。最適な戦略は [2] で示されているが、その最適性の証明には不完全な点がある。本論文では最適性の完全な証明を与え、最適な戦略を求めるアルゴリズムの直感的な解釈を与える。

2 競馬の定式化と基礎的考察

2.1 定式化

本章では文献 [3] に従って競馬を最適化問題として定式化する。本研究では、賭け師は m 頭が出走する競馬のレースで 1 着になる馬を予想する。胴元がオッズを設定し、賭け師は自分の持っている資金のすべてを出走する馬に分配して賭けると仮定する。このとき、 b_i を馬 i に賭ける割合、 o_i を馬 i のオッズとする。ここで $b_i \geq 0$ 、 $o_i > 0$ および $\sum b_i = 1$ が成立する。すると、もし馬 i がレースに勝ったならば、賭け師は馬 i に賭けた金額の o_i 倍を受け取り、ほかの馬に賭けた金額は没収される。よって、もし馬 i が勝った場合、賭け師の資金はレース終了後に $b_i o_i$ 倍となり、これが起こる確率は p_i である。記法を簡単にするため、 $b(i)$ および b_i という記号を同じ意味で用いる。賭け師が複数人いたとしてもオッズは胴元が決めるため賭け師の戦略への影響はない。

多数の賭け師が参加している競馬を考え、馬 i に対する馬券の売り上げを b'_i としたときにオッズが

$$b'_i o_i = \sum_{i=1}^m b'_i \quad (1)$$

したがって

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{o_i} = \sum_{i=1}^m \frac{b'_i}{\sum_{i=1}^m b'_i} = 1 \quad (2)$$

を満たすときオッズは公平なオッズであるという。これは、各馬に賭けられた賭け金の全てが配当金に使用されることを意味する。さらに、劣公平、優公平なオッズをそれぞれ $\sum \frac{1}{o_i} > 1$, $\sum \frac{1}{o_i} < 1$ と定義する。オッズが劣公平とは賭け金の一部が横取りされていることを意味し、オッズが優公平とは馬券の売り上げより多く配当金が支払われることを意味する。

定義 1 相対的資金 $S(X) = b(X)o(X)$ は馬 X がレースに勝ったときの賭け師の資金の、レースの前の資金に対する比である。

$S(X) = b(X)o(X)$ は馬 X が勝ったときに賭け師の資金に賭けられる倍率である。賭け師は自分の資金を再投資できるので、資金は各レースに対する成長率の掛け算で与えられる。したがって n 回のレースが終わったあとの賭け師の資金が S_n であるとする、

$$S_n \triangleq \prod_{i=1}^n S(X_i) \quad (3)$$

が成立する。

定義 2 競馬の倍増レートを

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) \triangleq \mathbf{E}[\log S(X)] \triangleq \sum_{k=1}^m p_k \log b_k o_k \quad (4)$$

と定める。

倍増レートと呼ばれる理由は次の定理によって正当化される。レースの結果 $X_1, X_2, \dots$ は独立で分布 $p(x)$ に従うとする。このとき賭け

定理 1 の戦略 $\mathbf{b}$ を用いる賭け師の資金は倍増レート $W(\mathbf{b}, \mathbf{p})$ で指数関数的に増大する。すなわち

$$S_n \doteq 2^{nW(\mathbf{b}, \mathbf{p})} \quad (5)$$

が成立する。

倍増レート $W(\mathbf{b}, \mathbf{p})$ を最大化するような賭け師の戦略を最適戦略という。本研究の主題は最適戦略 $\mathbf{b}$ の導出である。当然ながら、最適戦略は 1 着になる馬の分布 $\mathbf{p}$ とオッズに依存する。一方、自然なシナリオでは賭け師は分布 $\mathbf{p}$ を知らない。したがって賭け師は自分の戦略が最適であるかどうかを知ることはできないし、最適戦略を導くこともできない。つ

まり本論文では $\mathbf{p}$ を知る者を仮定し、その立場で最適な戦略を考えていることになる。とはいえ、賭け師が分布 $\mathbf{p}$ の推定値 $\mathbf{p}'$ を使い、 $\mathbf{p}'$ が真の分布と思って戦略を導くことはできる。しかし一般に $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ は異なるのでこの方法で導いた戦略は最適ではない。本論文では分布の推定値 $\mathbf{p}'$ を用いる状況は扱わない。

2.2 公平・優公平の場合の最適戦略

本節では文献 [3] に従い、オッズが公平な場合と優公平な場合の最適な戦略を導出する。オッズが公平な場合と優公平な場合は同じ方法で求めることができる。 $\mathbf{b}$ を $\sum b_i = 1$ という制約のもとで動かして $W(\mathbf{b}, \mathbf{p})$ を最大化する。ラグランジュの未定乗数を加え、対数の底を変更すると

$$J(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m p_i \ln b_i o_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^m b_i - 1 \right) \quad (6)$$

となる。 $J(\mathbf{b})$ を b_i で偏微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial b_i} = \frac{p_i}{b_i} + \lambda \quad (7)$$

となる。最大値を求めるため偏導関数を 0 とすると

$$b_i = -\frac{p_i}{\lambda} \quad (8)$$

となる。この b_i を式 (8) に代入すると

$$\sum_{i=1}^m -\frac{p_i}{\lambda} = 1 \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\lambda} = 1 \quad (10)$$

$$\lambda = -1 \quad b_i = p_i \quad (11)$$

となる。以上より $\mathbf{b}=\mathbf{p}$ が関数 $J(\mathbf{b})$ の停留点であることが分かった。この点が最大値であること示す。エントロピー $H(\mathbf{p})$ 、ダイバージェンス $D(\mathbf{p}||\mathbf{b})$ を

$$H(\mathbf{p}) = -\sum p_i \log p_i \quad (12)$$

$$D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) = \sum p_i \log \frac{p_i}{b_i} \quad (13)$$

とすると

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) = \sum p_i \log b_i o_i \quad (14)$$

$$= \sum p_i \log \left(\frac{b_i}{p_i} p_i o_i \right) \quad (15)$$

$$= \sum p_i \log o_i - \sum p_i \log \frac{1}{p_i} - \sum p_i \log \frac{p_i}{b_i} \quad (16)$$

$$= \sum p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) - D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) \quad (17)$$

$$\leq \sum p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) \quad (18)$$

となる．この式を見ると明らかに最大値は $\mathbf{b}=\mathbf{p}$ の場合であり，またその場合に限ることが分かる．

上記の解析では，賭け師がすべての資金を賭けに投資することを前提としていた．ところが実際は賭け師は資金の一部を投資せずに保持することもできる．実のところ，オッズが公平・優公平の場合は資金の一部を保持できたとしてもこの賭け方は最適である．

2.3 劣公平の場合の基礎的考察

オッズが劣公平の場合，レースの運営者がすべての賭けから賭け金の一部を横取りするため，賭け師が損をする可能性が高くなる．そのため賭け師が所持金の一部のみを賭けに使い，残りを現金で取っておく戦略を検討する．現金で手元にとっておく資金の割合を $b(0)$ とする．はじめに，少額 $\varepsilon > 0$ を 1 頭の馬に賭ける場合にどの馬 j に賭けるべきかを考える．まず $b(0) = 1 - \varepsilon$ ， $b(j) = \varepsilon$ とする．馬 X が勝ったときに賭け師の資金に掛けられる倍率 $S(X)$ は

$$S(X) = b(0) + b(X)o(X) \quad (19)$$

$$= 1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)1\{X = j\} \quad (20)$$

となる．倍増レートは

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) = \mathbf{E}[\log S(X)] \quad (21)$$

$$= \mathbf{E}[\log (1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)1\{X = j\})] \quad (22)$$

$$= \sum_{i=1}^m \log (1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)1\{i = j\}) \cdot p(i) \quad (23)$$

$$= \sum_{i \neq j} \log (1 - \varepsilon) \cdot p(i) + \log (1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)) \cdot p(j) \quad (24)$$

$$= \log (1 - \varepsilon) \cdot (1 - p(j)) + \log (1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)) \cdot p(j) \quad (25)$$

となる．この値が最大となる馬 j を考える．賭け師が得するためには $W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) > 0$ である必要があるので $W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) > 0$ として式変形すると

$$\log(1 - \varepsilon) \cdot (1 - p(j)) + \log(1 - \varepsilon + \varepsilon o(j)) \cdot p(j) > 0 \quad (26)$$

$$\{\log(1 + \varepsilon(o(j) - 1) - \log(1 - \varepsilon))\}p(j) + \log(1 - \varepsilon) > 0 \quad (27)$$

$$p(j) + \frac{\log(1 - \varepsilon)}{\log(1 + \varepsilon(o(j) - 1)) - \log(1 - \varepsilon)} > 0 \quad (28)$$

となる． $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると，ロピタルの定理より

$$p(j) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-\varepsilon}}{\frac{o(j)-1}{1+\varepsilon(o(j)-1)} + \frac{1}{1-\varepsilon}} = p(j) - \frac{1}{o(j) - 1 + 1} = p(j) - \frac{1}{o(j)} \quad (29)$$

となる．よって，少額 $\varepsilon > 0$ を 1 頭に賭けるならば， $p(j) - \frac{1}{o(j)}$ が最大となる馬 j に賭けるのが最適であるとわかる．

次に，少額 $\varepsilon > 0$ を馬 j_1 に $\alpha_1 \varepsilon$ ，馬 j_2 に $\alpha_2 \varepsilon$ を賭ける場合を考える．まず $b(0) = 1 - \varepsilon$ ， $b(j_1) = \alpha_1 \varepsilon$ ， $b(j_2) = \alpha_2 \varepsilon$ ， $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ とする．馬 X が勝ったときに賭け師の資金に掛けられる倍率 $S(X)$ は

$$S(X) = b(0) + b(X)o(X) \quad (30)$$

$$= 1 - \varepsilon + \alpha_1 \varepsilon o(j_1) 1\{X = j_1\} + \alpha_2 \varepsilon o(j_2) 1\{X = j_2\} \quad (31)$$

となる．倍増レートは

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n = \mathbf{E}[\log S(X)] \quad (32)$$

$$= \mathbf{E}[\log(1 - \varepsilon + \alpha_1 \varepsilon o(j_1) 1\{X = j_1\} + \alpha_2 \varepsilon o(j_2) 1\{X = j_2\})] \quad (33)$$

$$= \sum_{i=1}^m \log(1 - \varepsilon + \alpha_1 \varepsilon o(j_1) 1\{i = j_1\} + \alpha_2 \varepsilon o(j_2) 1\{i = j_2\}) \cdot p(i) \quad (34)$$

$$= \log(1 - \varepsilon) \cdot (1 - p(j_1) - p(j_2)) + \log\{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)\} \cdot p(j_1) + \log\{1 + \varepsilon(\alpha_2 o(j_2) - 1)\} \cdot p(j_2) \quad (35)$$

$$= \log\{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)\} \cdot p(j_1) + \log\{1 + \varepsilon((1 - \alpha_1)o(j_2) - 1)\} \cdot p(j_2) \quad (36)$$

となる．倍増レートが最大となる α_1, α_2 を求めるため

$$\log\{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)\} \cdot p(j_1) + \log\{1 + \varepsilon(\alpha_2 o(j_2) - 1)\} \cdot p(j_2) = 0 \quad (37)$$

として両辺を α_1 で微分すると

$$\frac{\varepsilon o(j_1)p(j_1)}{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)} - \frac{\varepsilon o(j_1)p(j_2)}{1 + \varepsilon\{(1 - \alpha_1)o(j_2) - 1\}} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\varepsilon o(j_1)p(j_1)\{1 + \varepsilon\{(1 - \alpha_1)o(j_2) - 1\} - \varepsilon o(j_2)p(j_2)\{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)\}}{\{1 + \varepsilon(\alpha_1 o(j_1) - 1)\}\{1 + \varepsilon\{(1 - \alpha_1)o(j_2) - 1\}} = 0 \quad (39)$$

$$\varepsilon^2 o(j_1)o(j_2)\alpha_1(p(j_1) + p(j_2)) = (1 - \varepsilon)\varepsilon o(j_1)p(j_1) + \varepsilon^2 o(j_1)p(j_1)o(j_2) - (1 - \varepsilon)\varepsilon o(j_2)p(j_2) \quad (40)$$

となる． よって

$$\alpha_1 = \frac{(1 - \varepsilon)o(j_1)p(j_1) + \varepsilon o(j_1)p(j_1)o(j_2) - (1 - \varepsilon)o(j_2)p(j_2)}{\varepsilon o(j_1)o(j_2)(p(j_1) + p(j_2))} \quad (41)$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{-(1 - \varepsilon)o(j_1)p(j_1) + \varepsilon o(j_1)p(j_1)o(j_2) + (1 - \varepsilon)o(j_2)p(j_2)}{\varepsilon o(j_1)o(j_2)(p(j_1) + p(j_2))} \quad (42)$$

となる． α_1 は $o(j_1)p(j_1) > o(j_2)p(j_2)$ ならば ε が小さいとき $\alpha_1 \gg 1$ となるが， この場合は馬 j_1 のみに賭けるのがよいと思われる．

この手順で賭ける馬の数を増やし一般化することは困難である． 次章では最適解を求めるアルゴリズムについて論ずる．

3 最適解を求めるアルゴリズムとその最適性

オッズが公平・優公平の場合の最適解は簡単な式で表された． 一方， オッズが劣公平の場合， 最適解は閉じた式で表すことはできないが， 最適解を導くアルゴリズムは存在する． そのアルゴリズムは文献 [2] で紹介されているが， その最適性の証明は厳密には完全ではない． 本章ではアルゴリズムを紹介し， 最適性の完全な証明を与える． さらにアルゴリズムの直感的解釈を試みる．

3.1 最適解を求めるアルゴリズム

最適な戦略 $\mathbf{b}$ は次のように求めることができる． ただし，

$$p_1 o_1 \geq p_2 o_2 \geq \cdots \geq p_m o_m$$

とする．

Step1. $k = 0$ とする．

Step2.

$$C_k = \frac{1 - \sum_{i=1}^k p_i}{1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{o_i}} \quad (43)$$

とおく．

Step3.

$$0 < C_k < p_{k+1} o_{k+1} \quad (44)$$

ならば $k \leftarrow k + 1$ として Step2 に戻る．

Step4. $t = k$ とおく．

Step5.

$$b_0 = C_t \quad (45)$$

$i = 1, 2, \dots, t$ に対して

$$b_i = p_i - \frac{C_t}{o_i} \quad (46)$$

$i = t+1, t+2, \dots, m$ に対して

$$b_i = 0 \quad (47)$$

とする.

3.2 最適性の証明

このアルゴリズムの C_k の分母が常に正になること 及び $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $b_i > 0$ になることについて文献 [2] には明記されていないため、最適性の証明は厳密には完全ではない. そのため本節ではこれらを証明し、文献 [2] を補ったもとでアルゴリズムで得られる $\mathbf{b}$ が最適であることを示す. まず、得られた解が最適であることを判定するために次の定理を準備する.

定理 2 α が確率ベクトルであるとき、 $f(\alpha)$ が $\mathbf{R}$ 上で $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ の凸関数であるとする. $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_k}$ は $\mathbf{R}$ 上で定義でき、連続である. ただし $\lim_{\alpha_k \rightarrow 0} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_k} \rightarrow 0$ となる場合を除く. このとき、 $f(\alpha)$ が R のある点 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ で最大値をとるための必要十分条件は、ある実数 λ が存在して

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_k} &= \lambda : \alpha_k > 0 \text{ であるような } k \text{ に対して} \\ \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_k} &\leq \lambda : \alpha_k = 0 \text{ であるような } k \text{ に対して} \end{aligned} \quad (48)$$

となることである [4]. この条件を Kuhn-Tucker 条件 (KT 条件) という.

定理 2 の証明については文献 [4] を参照されたい.

定理 3 3.1 節のアルゴリズムで求まる $\mathbf{b}$ は KT 条件を満たす.

(証明) まず

$$\frac{1}{o_1} < 1, \frac{1}{o_1} + \frac{1}{o_2} < 1, \dots, \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{o_i} < 1, \sum_{i=1}^d \frac{1}{o_i} \geq 1 \quad (49)$$

となるような一意な d が定まることに注意する．すると

$$\sum_{i=1}^d \frac{1}{o_i} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{o_i} + \frac{1}{o_d} \geq 1 \quad (50)$$

なので

$$C_{d-1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{d-1} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{o_i}} \geq \frac{\sum_{i=d}^m p_i}{\frac{1}{o_d}} = o_d \sum_{i=d}^m p_i \geq p_d o_d \quad (51)$$

$$(52)$$

となる．ゆえに

$$C_{d-1} \geq p_d o_d \quad (53)$$

となる．よって Step3, Step4 より

$$t \leq d - 1 \quad (54)$$

となる．これは $k \geq 1$ の Step2 における C_k の分母が常に正であることを示している．また、 $d \leq m$ であることに注意すれば $t < m$ が言える．

次に、 $t \geq 1$ に対し、 $i = 1, 2, \dots, t$ のときに $b_i > 0$ になることを示す． b_i は

$$b_i = \frac{1}{o_i} (p_i o_i - C_t) \geq \frac{1}{o_i} (p_t o_t - C_t) \quad (55)$$

である．また、 $p_t o_t > C_{t-1}$ であることから $t \geq 1$ に対し

$$C_{t-1} - C_t = C_{t-1} - \frac{1 - \sum_{i=1}^t p_i}{1 - \sum_{i=1}^t \frac{1}{o_i}} \quad (56)$$

$$= C_{t-1} - \frac{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} p_i) - p_t o_t}{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{o_i}) - 1} \quad (57)$$

$$> C_{t-1} - \frac{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} p_i) - C_{t-1}}{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{o_i}) - 1} \quad (58)$$

$$= \frac{C_{t-1}\{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{o_i}) - 1\} - o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} p_i) + C_{t-1}}{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{o_i}) - 1} \quad (59)$$

$$= \frac{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} p_i) - C_{t-1} - o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} p_i) + C_{t-1}}{o_t(1 - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{o_i}) - 1} \quad (60)$$

$$= 0 \quad (61)$$

が成り立つ。したがって、 b_i は

$$b_i \geq \frac{1}{o_i}(p_i o_t - C_t) > \frac{1}{o_i}(p_i o_t - C_{t-1}) > 0 \quad (62)$$

であるから、 $t \geq 1$ に対し、 $i=1, 2, \dots, t$ のときに $b_i > 0$ になる。

$\mathbf{b}$ が KT 条件を満たすことを確認する。 b_0 は $b_0 \geq 0$ なので

$$\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{b_0 + b_i o_i} - 1 = \sum_{i=1}^t \frac{p_i}{C_t + p_i o_i - C_t} + \sum_{i=t+1}^m \frac{p_i}{C_t} - 1 \quad (63)$$

$$= \sum_{i=1}^t \frac{1}{o_i} + \frac{1 - \sum_{i=1}^t \frac{1}{o_i}}{1 - \sum_{i=1}^t p_i} \times (1 - \sum_{i=1}^t p_i) - 1 \quad (64)$$

$$= 1 - 1 \quad (65)$$

$$= 0 \quad (66)$$

より KT 条件を満たす。

$1 \leq i \leq t$ における b_i は

$$b_i = p_i - \frac{C_t}{o_i} = \frac{1}{o_i}(o_i p_i - C_t) > 0 \quad (67)$$

であり、 $t+1 \leq i \leq m$ における b_i は $b_i=0$ なので

$$\frac{p_i o_i}{b_0 + b_i o_i} - 1 = \frac{p_i o_i}{C_t + p_i o_i - C_t} - 1 \quad (68)$$

$$= 1 - 1 \quad (69)$$

$$= 0 \quad (70)$$

より KT 条件を満たす。□

3.3 アルゴリズムの解釈

このアルゴリズムの t の決め方と $\mathbf{b}$ の決め方の $t = 2$ となる例を図 1, 図 2 に示す。どちらのグラフも縦軸が p 、横軸が $\frac{1}{o}$ を表している。 $p_k o_k = \frac{p_k}{\frac{1}{o_k}}$ より、 $p_k o_k$ は点 $\left(1 - \sum_{i=1}^k p_i, 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{o_i}\right)$ と点 $\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{o_i}\right)$ を端点とする傾き $\frac{p_k}{\frac{1}{o_k}}$ の線分とみなすことができる。図 1 はアルゴリズムに従って C_k と $p_{k+1} o_{k+1}$ の線分の傾きを比較し、 $C_2 > p_3 o_3$ から $t = 2$ に決まることを示している。図 2 は C_2 を傾き C_2 の直線とし、 C'_2 を C_2 と平行な直線としたとき、横軸が 1 のときの C_0 と C'_2 の差が b_1 、 C'_2 と C_2 の差が b_2 、 C_2 が b_0 であることを表している。

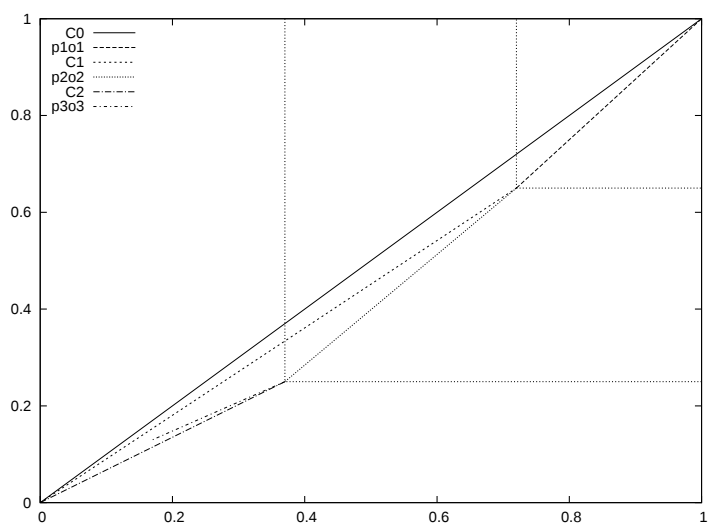


図1 アルゴリズムの t の決め方

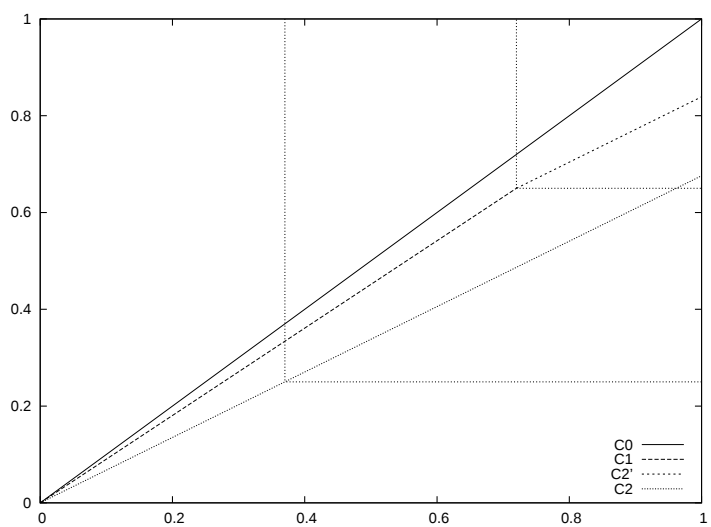


図2 アルゴリズムの b の決め方

4 まとめ

本研究では、胴元が設定したオッズに対し、 m 頭が出走する競馬のレースで 1 着になる馬を予想する際の賭け師の最適な戦略を示した。その際 [2] の最適なアルゴリズムには明記されていない点の証明を行い、それらを補ったもとでアルゴリズムの最適性の証明を示した。また、アルゴリズム t の決め方と b の決め方を図を用いて示した。

謝辞

本研究に当たり、細かく指導して下さった指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] JRA ホームページ 競馬小史, <http://jra.jp/topics/column/etc/history2.html>, <http://jra.jp/topics/column/etc/history.html>, 2016 年 1 月閲覧.
- [2] T.Cover, J.Thomas, Elements of Information Theory Second Edition Solutions to Problems, Internet Access, 2006.
- [3] T.Cover, J.Thomas, Elements of Information Theory 2nd ed, Wiley, 2006.
- [4] Robert G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, Wiley, 1968.