

信州大学  
大学院工学系研究科

修士論文

パケット間隔で情報を送る通信路  
に対する悲観的符号化定理

指導教員 西新 幹彦 准教授

専攻 電気電子工学専攻  
学籍番号 10TA235C  
氏名 藤山 直貴

2012 年 3 月 15 日

# 目次

|     |                                |    |
|-----|--------------------------------|----|
| 1   | はじめに                           | 1  |
| 2   | パケット間隔で情報を送る符号と達成可能性           | 1  |
| 2.1 | パケット間隔で情報を送る符号 . . . . .       | 2  |
| 2.2 | 楽観的な達成可能性 . . . . .            | 2  |
| 2.3 | 悲観的な達成可能性 . . . . .            | 2  |
| 3   | 通信路容量の等価性                      | 3  |
| 3.1 | 広義の通信路容量の等価性 . . . . .         | 3  |
| 3.2 | 狭義の通信路容量の等価性 . . . . .         | 8  |
| 4   | 符号化逆定理                         | 11 |
| 4.1 | ・/G/1 キューの逆定理 . . . . .        | 11 |
| 4.2 | ・/M/1 キューの逆定理 . . . . .        | 18 |
| 5   | 符号化順定理                         | 19 |
| 5.1 | ・/M/1 キューの順定理 . . . . .        | 19 |
| 5.2 | ・/G/1 キューの順定理 . . . . .        | 21 |
| 6   | まとめ                            | 22 |
|     | 謝辞                             | 23 |
|     | 参考文献                           | 23 |
|     | 付録 A $\liminf$ と $\limsup$ の関係 | 24 |
|     | 付録 B 符号の存在の証明                  | 24 |

## 1 はじめに

携帯電話などの情報伝達方法の一つにパケット通信がある．複数のユーザーが同時にネットワークを利用すると帯域占有などの問題が生じるがこれを解消してくれるのがこのパケット通信である．パケットというのは情報を送る単位のことである．その単位ごとで通信を行うのがパケット通信である．複数のユーザーが同時に利用するパケット通信システムを簡単化するため、送信者と受信者以外の関与によって遅延の生じる通信路をキューとサービス器で表現したモデルを考える．これを図 1 に示す．このサービス器はサービスレート  $\mu$ [packet/s] の性能を持っている．また、符号器で符号化された符号語はパケットとして通信路へ送信される．

このような通信システムにおいて、Anantharam and Verdú[1] はパケットの中に情報をのせるのではなく、パケットとパケットの間隔に情報をのせて通信するシステムを考えた．本来ならパケットの中にも情報をのせるのだが、簡単化するためにパケットの中の情報量は 0 とし、間隔のみで通信することを考える．従来研究での通信路容量の定義では符号語長  $n$  に関する符号の列に対し良い符号の部分列が存在することを要請している．それに対し、本研究では十分大きなすべての  $n$  で良い符号であることを要請するように通信路容量を新たに定義した．こうすることによって従来研究より定義が厳しくなり、一般に通信路容量は大きくはならない．本研究では、新たな定義のもとで順定理と逆定理を証明することによって従来研究と通信路容量が変わらないことを示した．これは通信路容量を達成する符号を探すための範囲を狭めたことを意味する．

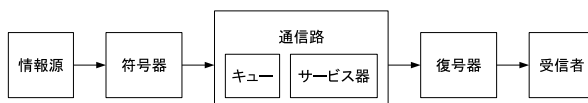


図 1 通信システムの構成

## 2 パケット間隔で情報を送る符号と達成可能性

この章では、2 種類の符号化と通信路容量の定義を示す．1 つは従来研究での符号化の定義を対比し易いように定義しなおしたもので、もう 1 つはその対比先となる本研究で新たに用いる符号化の定義である．

## 2.1 パケット間隔で情報を送る符号

本研究では、従来研究 [1] に倣い、パケットの間隔を用いた符号を次のように定義する．

**定義 1** 非負実数ベクトル  $(a_1, \dots, a_n)$  を符号語という．符号器が符号語  $(a_1, \dots, a_n)$  を送信するとき，時刻 0 で空のキューに対して時刻  $\sum_{i=1}^k a_i$  に  $k$  番目 ( $k \geq 1$ ) の到着が起こる．符号器は  $M$  個の符号語を持っているとし，それらは等確率で選ばれて送信される．復号器は  $n$  個の出発を観測し，正しい符号語を平均確率  $1 - \epsilon$  で復号する．最後の出発が起こる時刻の平均を  $T$  とおく．このような符号器・復号器を  $(n, M, T, \epsilon)$  符号という．

## 2.2 楽観的な達成可能性

**定義 1** の符号の元で，符号語長  $n$  に関する符号の列に対し良い符号の部分列が存在することを要請するように通信路容量を定義する．以下に示す 2 つの定義は Anantharam and Verdú によって定義されたものである．

**定義 2** 以下を満たす  $R$  の上限を通信路容量と呼び， $C$  と表す．

$$\frac{\log M_n}{T_n} \geq R \text{ を満たす } n \text{ が無限個あって}$$
$$\text{そのような } n \text{ の部分列に関して } \epsilon_n \rightarrow 0$$

となるような符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する．

**定義 3** レート  $R$  が出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能とは，無限個の  $n$  で

$$\frac{n}{T_n} \geq \lambda, \lambda \frac{\log M_n}{n} \geq R, \epsilon_n \leq \epsilon$$

となるような符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである． $0 < \epsilon < 1$  なる任意の  $\epsilon$  において  $R$  が出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能であれば， $R$  は出力レート  $\lambda$  で達成可能であるという．出力レート  $\lambda$  で達成可能な  $R$  の上限を，出力レート  $\lambda$  におけるキューの通信路容量と呼び， $C(\lambda)$  と表す．

**定義 2** と **定義 3** は後に示す定理 1 の意味で同等である．このような符号化を楽観的な符号化と呼ぶ．楽観的な符号化における通信路容量を以後，広義の通信路容量と呼ぶことにする．

## 2.3 悲観的な達成可能性

**定義 1** の符号の元で，楽観的な符号化よりも条件の厳しい符号化を考え，これを悲観的な符号化と呼ぶことにする．楽観的な符号化での通信路容量の定義では符号語長  $n$  に関する符号の列に対し良い符号の部分列が存在することを要請しているがそれに対し，悲観的な符号化では十分大きなすべての  $n$  で良い符号であることを要請するように通信路容量を定義した．本

来，情報理論における符号化定理は十分大きなすべての  $n$  で成り立つように議論されているので，本研究でもこれを用いる．悲観的な符号化における通信路容量とキューの通信路容量を以下に定義する．

定義 2' 以下を満たす  $R$  の上限を通信路容量と呼び， $C'$  と表す．

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{T_n} \geq R \quad , \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} < \infty$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} < \infty \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$$

となるような符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する．

定義 3' レート  $R$  が出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能とは

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{\log M_n}{n} \geq R \quad , \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} < \infty$$

$$\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} < \infty \quad , \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \epsilon$$

となるような符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである．

レート  $R$  が出力レート  $\lambda$  で達成可能とは任意の  $\epsilon > 0$  においてレート  $R$  が出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能であり，達成する符号の列に対して  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n}$  が  $\epsilon$  に関して一様に有界であることである．出力レート  $\lambda$  で達成可能な  $R$  の上限を，出力レート  $\lambda$  におけるキューの通信路容量と呼び， $C'(\lambda)$  と表す．また，悲観的な符号化における通信路容量を狭義の通信路容量と呼ぶことにする．

### 3 通信路容量の等価性

前章で定義した広義の通信路容量とキューの広義の通信路容量は定理 1 の意味で同等である．このため，パラメータ  $\lambda$  をとおしてキューの通信路容量を求めることによって本来求めたい通信路全体の通信路容量を求めることができる．これは従来研究によって証明されたものであるが，本論文ではその詳細を明らかにしつつ紹介する．同様に，狭義の通信路容量とキューの狭義の通信路容量も定理 2 の意味で同等である．これを証明することで，新たに定義した通信路容量でも同様に通信路全体の通信路容量を求めることができる．

#### 3.1 広義の通信路容量の等価性

定義 1～3 で定義した楽観的な符号化における通信路容量について次の定理が成り立つ．  
定理 1 ([1]) サービスレート  $\mu$  のサービス器をもつ通信路において広義の通信路容量  $C$  とキューの広義の通信路容量  $C(\lambda)$  は以下の関係を満たす．

$$C = \sup_{\lambda < \mu} C(\lambda) \tag{1}$$

証明 まず  $C \geq \sup_{\lambda < \mu} C(\lambda)$  を示す．ある  $\lambda < \mu$  で  $C < C(\lambda)$  と仮定する．この矛盾を示すことで任意の  $\lambda < \mu$  で  $C \geq C(\lambda)$  を示し， $C \geq \sup_{\lambda < \mu} C(\lambda)$  を導く．

$C < C(\lambda)$  となる  $\lambda$  のもとで

$$C < R < C(\lambda) \quad (2)$$

となるレート  $R$  を考える．このときレート  $R$  は出力レート  $\lambda$  で達成可能で，すなわち  $0 < \epsilon < 1$  を満たす任意の  $\epsilon$  でレート  $R$  は出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能である．

ここで自然数  $k$  に対し  $\delta_k = \frac{1}{k+1}$  とする． $\delta_k > 0$  であることから，各  $k$  に対して無限個の  $n$  で

$$\frac{n}{T_n^{(k)}} \geq \lambda, \quad \lambda \frac{\log M_n^{(k)}}{n} \geq R, \quad \epsilon_n^{(k)} \leq \delta_k \quad (3)$$

を満たす符号の列  $\{(n, M_n^{(k)}, T_n^{(k)}, \epsilon_n^{(k)})\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する．ここで， $k = 1$  で (3) を満たす  $n$  として  $n_1$  を選ぶ．次に， $k = 2, 3, \dots$  に対して順に  $n_k > n_{k-1}$  かつ (3) を満たす  $n_k$  を選ぶ．このとき  $n_k$  は  $k$  に関して単調増加であり，各  $k$  に対し

$$M_{n_k} \equiv M_{n_k}^{(k)}, \quad T_{n_k} \equiv T_{n_k}^{(k)}, \quad \epsilon_{n_k} \equiv \epsilon_{n_k}^{(k)}$$

として符号の列  $\{(n_k, M_{n_k}, T_{n_k}, \epsilon_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  を作る．すると，各  $k$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\log M_{n_k}}{T_{n_k}} &= \frac{\log M_{n_k}^{(k)}}{T_{n_k}^{(k)}} \\ &= \frac{n_k}{T_{n_k}^{(k)}} \frac{\log M_{n_k}^{(k)}}{n_k} \\ &\geq \lambda \frac{\log M_{n_k}^{(k)}}{n_k} \\ &\geq R \end{aligned}$$

となり，かつ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_{n_k}^{(k)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$$

となる．以上よりレート  $R$  は定義 2 より  $R \leq C$  を満たす．これは (2) に矛盾する．

次に，再び背理法で  $C \leq \sup_{\lambda < \mu} C(\lambda)$  を示す．ある  $\alpha > 0$  が存在して，すべての  $\lambda < \mu$  で

$$C > C(\lambda) + \alpha \quad (4)$$

と仮定する．ここで  $C(\lambda) < C - \alpha < C$  に注意して

$$C - \alpha < R < C \quad (5)$$

となる  $R$  を考える．このときある単調増加列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  があって

$$\frac{\log M_{n_k}}{T_{n_k}} \geq R, \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_{n_k} = 0 \quad (6)$$

を満たす符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する．さらに  $0 < \epsilon < 1$  なる任意の  $\epsilon$  について考える．このとき，十分大きい  $k$  に対して

$$\epsilon_{n_k} < \frac{\epsilon}{2} \quad (7)$$

また、以下を満たす十分小さい  $\beta > 0$  について考える．

$$\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)} R > C - \alpha \quad (8)$$

$$\frac{1}{(1 + \frac{\beta}{\mu})} R > C - \alpha \quad (9)$$

ここで

$$l \equiv \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{T_{n_k}} \quad (10)$$

と定義する．

(a)  $l > 0$  の場合

レート  $\lambda'$  を

$$\lambda' \equiv (1 - \beta)l$$

とおくと，(10) より

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{T_{n_k}} > \lambda'$$

となるので，十分大きなすべての  $k$  で

$$\frac{n_k}{T_{n_k}} > \lambda' \quad (11)$$

となる．一方，再び (10) より無限個の  $k$  で

$$\begin{aligned} \frac{n_k}{T_{n_k}} &< (1 + \beta)l \\ \therefore \frac{l}{n_k} &> \frac{1}{(1 + \beta)T_{n_k}} \end{aligned}$$

なので, (11) を用いると, 無限個の  $k$  で

$$\begin{aligned}\lambda' \frac{\log M_{n_k}}{n_k} &= (1 - \beta) l \frac{\log M_{n_k}}{n_k} \\ &> \frac{(1 - \beta) \log M_{n_k}}{(1 + \beta) T_{n_k}} \\ &\geq \frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)} R \\ &> C - \alpha\end{aligned}$$

となる. よって, 任意の  $0 < \epsilon < 1$  に対して, 符号の列  $\{(n, m_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  は, 無限個の  $n$  で

$$\frac{n}{T_n} \geq \lambda' \quad , \quad \lambda' \frac{\log M_n}{n} \geq C - \alpha \quad , \quad \epsilon_n \leq \epsilon$$

を満たす. よってレート  $C - \alpha$  は出力レート  $\lambda'$  で達成可能である. ところが, 出力レート  $\lambda'$  で達成可能なレートの上限は  $C(\lambda')$  であるので

$$C - \alpha \leq C(\lambda')$$

$$\therefore C \leq C(\lambda') + \alpha$$

でなければならない. これは仮定 (4) に矛盾する.

(b)  $l = 0$  の場合

いま

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta T_{n_k} - n_k}{T_{n_k}} = \beta > 0$$

なので, 十分大きなすべての  $k$  で

$$\frac{\beta T_{n_k} - n_k}{T_{n_k}} > 0$$

$$\therefore \beta T_{n_k} - n_k > 0$$

となる. 以降は

$$\beta T_n > n \tag{12}$$

となるような  $n$  について考える. ここで

$$m_n \equiv \beta T_n \tag{13}$$

とおく. ここで先ほどの (6) を満たす  $(n, M_n, T_n, \epsilon_n)$  符号の各符号語を構成するパケットの到着時刻を全体に  $(m_n - n)(\frac{1}{\mu} + \delta)$  だけ遅らせて, 時刻 0 に到着するパケットを  $(m_n - n)$

個追加する（パケットの総数を  $m_n$  個にする）。ただし， $\delta > 0$  は十分小さいとする．そして追加されたパケットが時刻  $(m_n - n)(\frac{1}{\mu} + \delta)$  までにサーバーから出なければその符号語は誤りとみなす．これによって新しくできた符号の列を  $\{(m_n, M'_{m_n}, T'_{m_n}, \epsilon'_{m_n})\}_{n=1}^{\infty}$  と表す．大数の弱法則より  $n$  が十分大きければ，追加されたパケットのせいで誤りとみなされる確率は  $\epsilon/2$  以下になるので (7) より

$$\epsilon'_{m_n} < \epsilon \quad (14)$$

となる．一方， $m_n$  個すべてのパケットが復号器に届く時間の平均値  $T'_{m_n}$  は，(12) が成り立つような  $n$  に対して

$$\begin{aligned} T'_{m_n} &< T_n + (m_n - n) \left( \frac{1}{\mu} + \delta \right) \\ &< T_n + m_n \left( \frac{1}{\mu} + \delta \right) \\ &= m_n \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\mu} + \delta \right) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\lambda'' \equiv \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\mu} + \delta}$$

とおくと，無限個の  $n$  で

$$\frac{m_n}{T'_{m_n}} \geq \lambda'' \quad (15)$$

となる．新しく作った符号の符号語数は元の符号と変わらず

$$M'_{m_n} \equiv M_n$$

であるから，無限個の  $n$  で

$$\begin{aligned} \lambda'' \frac{\log M'_{m_n}}{m_n} &= \lambda'' \frac{\log M_n}{m_n} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\mu} + \delta} \frac{\log M_n}{\beta T_n} \\ &= \frac{1}{1 + \beta(\frac{1}{\mu} + \delta)} \frac{\log M_n}{T_n} \\ &\geq \frac{1}{1 + \beta(\frac{1}{\mu} + \delta)} R \\ &> C - \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

となる．ただし，最後の不等式は  $\delta > 0$  が十分小さいことによる．以上より，任意の  $0 < \epsilon < 1$  に対して無限個の  $n$  で (14)(15)(16) を満たす符号の列が存在するので，定義 3 よりレート

$C - \alpha$  は出力レート  $\lambda''$  で達成可能である．ところが，出力レート  $\lambda''$  で達成可能なレートの上限は  $C(\lambda'')$  であるので

$$C - \alpha \leq C(\lambda'')$$

$$\therefore C \leq C(\lambda'') + \alpha$$

でなければならない．これは仮定に矛盾する．□

### 3.2 狭義の通信路容量の等価性

本研究で新たに定義した狭義の通信路容量についても広義の通信路容量と同様の同等性が成り立つ．これを次に示す．

**定理 2** サービスレート  $\mu$  のサービス器をもつ通信路において狭義の通信路容量  $C'$  とキューの狭義の通信路容量  $C'(\lambda)$  は以下の関係を満たす．

$$C' = \sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda) \quad (17)$$

**証明** まず  $C' \geq \sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda)$  を示す．任意の  $0 < \lambda < \mu$  に対して

$$0 < R < C'(\lambda) \quad (18)$$

となる任意のレート  $R$  を考える．このときレート  $R$  は出力レート  $\lambda$  で達成可能である．ここで自然数  $k$  に対し  $\delta_k = \frac{1}{k}$  とする． $\delta_k > 0$  であることから，定義 3' より各  $k$  に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{\log M_n^{(k)}}{n} \geq R \quad (19)$$

$$\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n^{(k)}} < \infty \quad (20)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n^{(k)} \leq \delta_k \quad (21)$$

を満たす符号の列  $\{(n, M_n^{(k)}, T_n^{(k)}, \epsilon_n^{(k)})\}_{n=1}^{\infty}$  が存在し，さらに

$$\sup_k \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n^{(k)}}{n} < \infty \quad (22)$$

が成り立つ．ここで，(19)(20)(21) より，各  $k$  に対してある  $n_k$  が存在して， $n_k$  以上のすべての  $n$  で

$$\lambda \frac{\log M_n^{(k)}}{n} \geq R - \delta_k \quad (23)$$

$$\frac{n}{T_n^{(k)}} \geq \lambda - \delta_k \quad (24)$$

$$\epsilon_n^{(k)} \leq \delta_k + \delta_k = 2\delta_k \quad (25)$$

となる．いま

$$k_n \equiv \max\{k | n_i \leq n \text{ for } 1 \leq i \leq k\} \quad (26)$$

と定める． $n \rightarrow \infty$  のとき  $k_n \rightarrow \infty$  となる．これを用いて

$$M_n \equiv M_n^{(k_n)} \quad , \quad T_n \equiv T_n^{(k_n)} \quad , \quad \epsilon_n \equiv \epsilon_n^{(k_n)}$$

なる符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^\infty$  を考える．さて，(24) より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n^{(k_n)}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda - \delta_{k_n}) = \lambda > 0$$

が得られる．一方で，パケットの間隔を広げることによって符号語数  $M_n$  を変えずかつ誤り確率  $\epsilon_n$  を大きくすることなく  $T_n$  を自由に大きくできることに注意する．すると  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$  の値を変えずに  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$  を小さくすることによって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$$

とすることができる．よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$  が存在し

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} < \infty \quad (27)$$

となる．次に，(22) より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} < \infty \quad (28)$$

が成り立つ．さらに， $n$  が十分大きいとき  $k = k_n$  に対して (23)(24) が成り立つので

$$\begin{aligned} \frac{\log M_n}{T_n} &= \frac{n}{T_n} \frac{\log M_n}{n} \\ &\geq (\lambda - \delta_{k_n}) \frac{\log M_n}{n} \\ &= \lambda \frac{\log M_n}{n} - \delta_{k_n} \frac{\log M_n}{n} \\ &\geq R - \delta_{k_n} - \delta_{k_n} \frac{\log M_n}{n} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{T_n} &\geq R - \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_{k_n} \frac{\log M_n}{n} \\ &\geq R - \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_{k_n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} \\ &= R \end{aligned} \quad (29)$$

最後に (25) より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_{k_n} = 0 \quad (30)$$

となる . (27)(28)(29)(30) より

$$C' \geq R$$

が出る . したがって

$$C' \geq C'(\lambda)$$

であるが ,  $\lambda$  は  $0 < \lambda < \mu$  の範囲で任意だったので

$$C' \geq \sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda)$$

を得る .

次に , 背理法で  $C' \leq \sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda)$  を示す . まず

$$\sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda) < C'$$

と仮定する . このとき , 十分小さい  $\gamma > 0$  に対して

$$\sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda) < R < R + \gamma < C' \quad (31)$$

なる  $R$  が存在し , このとき定義 2' より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{T_n} \geq R + \gamma \quad (32)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} < \infty \quad (33)$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} < \infty \quad (34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \quad (35)$$

を満たす符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する . まず , (35) より任意の  $0 < \epsilon < 1$  に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \epsilon \quad (36)$$

は明らか . 次に

$$\gamma' < \gamma \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n}}$$

なる十分小さい  $\gamma' > 0$  をとって

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} - \gamma' < \lambda < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} \quad (37)$$

なる  $\lambda$  をとる．すると

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{\log M_n}{n} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} \frac{\log M_n}{n} - \gamma' \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{T_n} - \gamma' \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} \\
&\geq R + \gamma - \gamma' \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} \\
&> R
\end{aligned} \tag{38}$$

が成り立つ．(33)(36)(37)(38) よりレート  $R$  は出力レート  $\lambda$  で達成可能であるから

$$C'(\lambda) \geq R$$

が成り立つ．さらに，このとき  $0 < \lambda < \mu$  に注意すれば

$$\sup_{0 < \lambda < \mu} C'(\lambda) \geq R$$

であるが，これは仮定 (31) に矛盾する．□

## 4 符号化逆定理

本章では，通信路容量の逆定理を示す．広義の通信路容量の証明の手順は従来研究 [1] と同じであるが，前章と同様に詳細を明らかにしながら紹介する．これを踏まえて狭義の通信路容量の逆定理を証明する．また，キューの形式を 2 種類考え，次節では  $\cdot/G/1$  キューで証明し，次々節では  $\cdot/M/1$  キューで証明する．ただし， $\cdot/G/1$  キューでは広義の通信路容量の証明を紹介し，狭義の通信路容量を証明をするが， $\cdot/M/1$  キューでは手順が同じなので狭義の通信路容量の証明のみ示す．

### 4.1 $\cdot/G/1$ キューの逆定理

この節ではサーバーが 1 つ，サービス分布が一般分布の  $\cdot/G/1$  キューで逆定理を証明する．広義の通信路容量の証明を詳細を明らかにしながら紹介し，続いて狭義の通信路容量の証明をする．

#### 4.1.1 広義の通信路容量

広義の通信路容量とキューの広義の通信路容量について，逆定理を示す．

定理 3 ([1]) サービスレート  $\mu(\lambda \leq \mu)$ ，サービスタイム  $S(E[S] = \frac{1}{\mu})$  のサービス器をもつ

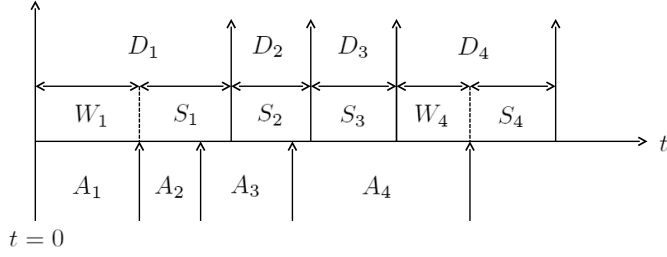


図 2 到着間隔，出発間隔，サービス時間，仕事をしていない時間の関係

通信路において，キューの広義の通信路容量  $C(\lambda)$  は以下を満たす．

$$C(\lambda) \leq \lambda \sup_{\substack{X \geq 0 \\ E[X] \leq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}} I(X; X + S) \quad (39)$$

ただし， $X$  と  $S$  は独立である．

証明 任意の小さい  $\epsilon > 0$  を考える．いま，ある  $(n, M_n, T_n, \epsilon_n)$  符号が

$$\frac{n}{T_n} \geq \lambda \quad \text{かつ} \quad \epsilon_n \leq \epsilon$$

を満たすと仮定する．これらは定義 3 の達成可能な条件の内の 2 つである．これらを仮定すると残りの条件を満たさないことで逆定理を証明する．

まず，確率変数  $A_i, D_i, S_i, W_i$  をそれぞれ次のようにおく (図 2)．

$A_i$  :  $i$  番目の到着間隔時間

$D_i$  :  $i$  番目の出発間隔時間

$S_i$  :  $i$  番目のサービス時間

$W_i$  :  $i$  番目の仕事をしていない時間

上より， $k$  番目に到着する時刻， $k$  番目に出発する時刻はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^k A_i, \sum_{i=1}^k D_i$$

であり，また

$$D_i = W_i + S_i \quad (40)$$

である．ここで， $S_i$  は  $A_i$  および  $D^{i-1}$  に依存しない．さらに

$$W_i = \max \left( 0, \sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=1}^i D_j \right)$$

であり ,

$$D^i = (D_1, D_2, \dots, D_i)$$

とする . また , 送信されたメッセージを  $U \in \{1, \dots, M\}$  , 受信されたメッセージを  $V \in \{1, \dots, M\}$  とする . これらにファノの不等式 [5] , Data Processing Lemma[5] を適用すると以下が導ける .

$$\begin{aligned} \log M_n &\leq \frac{1}{1 - \epsilon_n} (I(U; V) + \log 2) \\ &\leq \frac{1}{1 - \epsilon_n} (I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) + \log 2) \end{aligned} \quad (41)$$

さらに , 到着間隔やサービス時間の分布に関わらず , 上の相互情報量は次の重要な恒等式を満たす .

$$I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) = \sum_{i=1}^n I(W_i; W_i + S_i) - D \left( P_{D_1, \dots, D_n} \left\| \prod_{i=1}^n P_{D_i} \right\| \right) \quad (42)$$

これを導く . まず

$$I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) = I(A^n; D^n)$$

と書けるので

$$\begin{aligned} &I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) \\ &= I(A^n; D_1) + \sum_{i=2}^n I(A^n; D_i | D^{i-1}) \\ &= I(A^n; D_1) + \sum_{i=2}^n I(A^n, D^{i-1}; D_i) - \sum_{i=2}^n I(D^{i-1}; D_i) \\ &= I(A^n; D_1) + \sum_{i=2}^n I(W_i; D_i) - \sum_{i=2}^n I(D^{i-1}; D_i) \\ &= I(A^n; D_1) - I(A_1; D_1) + \sum_{i=1}^n I(W_i; W_i + S_i) - \sum_{i=2}^n I(D^{i-1}; D_i) \end{aligned} \quad (43)$$

となる . ここで

$$\begin{aligned} I(A^n; D_1) &= I(A_1; D_1) + I(A^n; D_2, \dots, D_n | D_1) \\ &= I(A_1; D_1) + I(A^n; D_2 | D_1) I(A^n; D_3, \dots, D_n | D_2) \\ &= I(A_1; D_1) + \sum_{i=2}^n I(A_i; D_1 | A^{i-1}) \end{aligned}$$

であり , この式の右辺第 2 項について

$$I(A_i; D_1 | A^{i-1}) = E \left[ \log \frac{P(A_i, D_1 | A^{i-1})}{P(A_i | A^{i-1}) P(D_1 | A^{i-1})} \right] = 0$$

といえるので ,

$$I(A^n; D_1) = I(A_1; D_1) \quad (44)$$

である . さらに (42) の右辺第 2 項について

$$\begin{aligned}
& D \left( P_{D_1, \dots, D_n} \parallel \prod_{i=1}^n P_{D_i} \right) \\
&= \sum_{d^n} P_{D_1, \dots, D_n}(d^n) \log \frac{P_{D_1, \dots, D_n}}{\prod_{i=1}^n P_{D_i}(d_i)} \\
&= \sum_{d^n} P_{D_1, \dots, D_n}(d^n) \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{P_{D_i}(d_i)} + \sum_{d^n} P_{D_1, \dots, D_n}(d^n) \log P_{D_1, \dots, D_n}(d^n) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{d^n} P_{D_1, \dots, D_n}(d^n) \log \frac{1}{P_{D_i}(d_i)} - H(D^n) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{d^n} P_{D_i}(d_i) \log \frac{1}{P_{D_i}(d_i)} - H(D^n) \\
&= \sum_{i=1}^n H(D_i) - H(D^n) \\
&= H(D_1) + \sum_{i=2}^n H(D_i) - H(D^n) \\
&= H(D_1) + \sum_{i=2}^n I(D^{i-1}; D_i) + \sum_{i=2}^n H(D_i | D^{i-1}) - H(D^n) \\
&= \sum_{i=2}^n I(D^{i-1}; D_i) \quad (45)
\end{aligned}$$

を得る . ただし最後の等式は

$$H(D_1) + \sum_{i=2}^n H(D_i | D^{i-1}) = H(D^n)$$

より成り立つ . (43)(44)(45) より (42) が導けた . 次に ,  $g(a)$  を以下のように定義する .

$$g(a) = \sup_{X \geq 0, E[X] \leq a} I(X; X + S) \quad (46)$$

ここで ,  $X$  と  $S$  は独立である .  $g(a)$  は  $a$  に関して上に凸の単調増加関数である . また , (42)

と (46) より

$$\begin{aligned}
I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) &= \sum_{i=1}^n I(W_i; W_i + S_i) - D \left( P_{D_1, \dots, D_n} \left\| \prod_{i=1}^n P_{D_i} \right\| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n I(W_i; W_i + S_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sup_{X \geq 0, E[X] \leq E[W_i]} I(X; X + S) \\
&= \sum_{i=1}^n g(E[W_i])
\end{aligned}$$

となり，次の不等式を得る．

$$I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) \leq \sum_{i=1}^n g(E[W_i]) \quad (47)$$

また (40) より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[W_i] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[D_i] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[S_i] \\
&= \frac{T_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}
\end{aligned} \quad (48)$$

となる．ただし最後の不等式は十分大きなすべての  $n$  で成り立つ．(41)，(47)，(48)， $g(a)$  の凸性より

$$\begin{aligned}
\lambda \frac{\log M_n}{n} &\leq \frac{\lambda}{n} \frac{1}{1 - \epsilon_n} (I(A_1, \dots, A_n; D_1, \dots, D_n) + \log 2) \\
&\leq \frac{\lambda}{1 - \epsilon_n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(E[W_i]) + \frac{\log 2}{n} \right) \\
&\leq \frac{\lambda}{1 - \epsilon_n} \left( g \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[W_i] \right) + \frac{\log 2}{n} \right) \\
&\leq \frac{1}{1 - \epsilon_n} \left( \lambda g \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\lambda \log 2}{n} \right)
\end{aligned} \quad (49)$$

が導ける．また，

$$R > R - 2\gamma > \lambda g \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right)$$

を満たすような任意の  $R, \gamma > 0$  を考える．これより式 (49) に代入すると， $n$  が十分大きく， $\epsilon$  が十分小さければ

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\log M_n}{n} &< \frac{1}{1 - \epsilon_n} \left( R - 2\gamma + \frac{\lambda \log 2}{n} \right) \\ &< \frac{1}{1 - \epsilon_n} (R - \gamma) \\ &\leq \frac{1}{1 - \epsilon} (R - \gamma) \\ &< R\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって  $\epsilon > 0$  が十分小さいとき， $n$  が十分大きいと定義 3 の 3 つの条件は同時に満たされない．すなわちこの  $R$  は出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能でない．よって達成可能な  $R$  は

$$R \leq \lambda g\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)$$

である必要がある．□

#### 4.1.2 狭義の通信路容量

狭義の通信路容量とキューの狭義の通信路容量についても，広義の通信路容量と同様に逆定理を示す．

定理 4 サービスレート  $\mu (\lambda \leq \mu)$ ，サービスタイム  $S (E[S] = \frac{1}{\mu})$  のサービス器をもつ通信路において，キューの狭義の通信路容量  $C'(\lambda)$  は以下を満たす．

$$C'(\lambda) \leq \lambda \sup_{\substack{X \geq 0 \\ E[X] \leq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}} I(X; X + S) \quad (50)$$

ただし， $X$  と  $S$  は独立である．

証明 任意の小さい  $\epsilon > 0$  を考える．いま，符号の列  $\{(n, M_n, T_n, \epsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n} < \infty, \lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} < \infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \epsilon$$

を満たすと仮定する．これらは定義 3' の達成可能な条件の内の 3 つである．これらを仮定すると残りの条件を満たさないことで逆定理を証明する．まず，(41) と (47) は今も成り立っているので  $g(a)$  の凸性より

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\log M_n}{n} &\leq \frac{\lambda}{1 - \epsilon_n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(E[W_i]) + \frac{\log 2}{n} \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{1 - \epsilon_n} \left( g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[W_i]\right) + \frac{\log 2}{n} \right) \quad (51)\end{aligned}$$

を得る．一方，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \leq \frac{1}{\lambda}$$

より，任意の  $\xi > 0$  に対して十分大きなすべての  $n$  で

$$\frac{T_n}{n} < \frac{1}{\lambda} + \xi$$

となって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[W_i] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[D_i] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[S_i] \\ &= \frac{T_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu} \\ &< \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} + \xi \end{aligned}$$

となる．よって (51) は十分大きなすべての  $n$  で

$$\lambda \frac{\log M_n}{n} \leq \frac{\lambda}{1 - \epsilon_n} \left( g \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} + \xi \right) + \frac{\log 2}{n} \right)$$

となる．ここで

$$R > R - 3\gamma > \lambda g \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} + \xi \right)$$

なる任意の  $R, \gamma > 0$  を考えると， $n$  が十分大きければ，かつ  $\gamma$  に対して  $\epsilon > 0$  が十分小さければ

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\log M_n}{n} &\leq \frac{1}{1 - \epsilon_n} \left( R - 3\gamma + \frac{\lambda \log 2}{n} \right) \\ &< \frac{1}{1 - \epsilon_n} (R - 2\gamma) \\ &< \frac{1}{1 - \epsilon} (R - 2\gamma) \\ &< R - \gamma \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{\log M_n}{n} &\leq R - \gamma \\ \therefore \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{\log M_n}{n} &< R \end{aligned}$$

となって  $R$  は出力レート  $\lambda$  で  $\epsilon$ -達成可能でない．よって  $R$  が出力レート  $\lambda$  で達成可能であるためには

$$R \leq \lambda g \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} + \xi \right)$$

でなければならないが,  $\xi > 0$  は任意で  $g(a)$  は連続であったので, 結局

$$R \leq \lambda g\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)$$

である必要がある.  $\square$

## 4.2 $\cdot/M/1$ キューの逆定理

定理 4 より  $\cdot/G/1$  キューでの狭義の通信路容量の上界を求めることができた. 本節では, サービス分布が指数分布である  $\cdot/M/1$  キューで狭義の通信路容量の上界を求める.

定理 5 サービスタイム  $S$  の分布がレート  $\mu$  ( $\lambda \leq \mu$ ) の指数分布であるようなサービス器をもつ通信路において, キューの狭義の通信路容量  $C'(\lambda)$  は以下を満たす.

$$C'(\lambda) \leq \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \quad (0 < \lambda \leq \mu) \quad (52)$$

$$C' \leq e^{-1} \mu \quad (53)$$

証明 定理 4 より

$$C'(\lambda) \leq \lambda \sup_{\substack{X \geq 0 \\ E[X] \leq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}} I(X; X + S) \quad (54)$$

である. ここで  $\sup$  をとる範囲に属する任意の確率変数  $X$  を考え,  $a \equiv E[X]$  とおく. また, 非負確率変数  $\bar{X}$  の分布を

$$\Pr[\bar{X} = 0] = \frac{1}{\mu a + 1}$$

$$\Pr[\bar{X} > x | \bar{X} > 0] = e^{-\frac{\mu x}{\mu a + 1}}$$

とする. このとき  $E[\bar{X}] = E[X] = a$  である. さらに

$$I(X; X + S) \leq I(\bar{X}; \bar{X} + S)$$

と

$$I(\bar{X}; \bar{X} + S) = \log(1 + \mu a)$$

が成り立つ [1]. したがって (54) より

$$\begin{aligned} C'(\lambda) &\leq \lambda \sup_{a \leq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}} \log(1 + \mu a) \\ &= \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \end{aligned}$$

となる．また，定理 2 より

$$\begin{aligned} C' &\leq \sup_{0 < \lambda < \mu} \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \\ &= e^{-1} \mu \end{aligned}$$

となる．ここに， $\sup$  は  $\lambda = e^{-1} \mu$  で達成された．□

## 5 符号化順定理

前章では楽観的な符号化と悲観的な符号化の両方で逆定理を示した．本章では順定理を示すのだが，それぞれの証明の手順において差異がないため悲観的な符号化の順定理のみ示す．

### 5.1 $\cdot / M / 1$ キューの順定理

本節では，サービス分布が指数分布である  $\cdot / M / 1$  キューにおいて狭義の通信路容量の順定理を示す．

定理 6 サービスレート  $\mu$  の  $\cdot / M / 1$  キューシステムにおいて狭義の通信路容量  $C'$  とキューの狭義の通信路容量  $C'(\lambda)$  は以下を満たす．

$$C'(\lambda) \geq \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \quad (0 < \lambda < \mu) \quad (55)$$

$$C' \geq e^{-1} \mu \text{ [nat/s]} \quad (56)$$

証明 はじめに，キューが平衡状態であると仮定する．また， $\lambda < \mu$  と固定し， $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  とする．さらに，一般性を損なうことなくキューは *FIFO* であると仮定する．

送信を始めるときに符号器はキューに情報量が 0 の“パケット 0”を投入する．この“パケット 0”は  $N$  個のダミーパケットを見つける．ダミーパケットとはキューが平衡状態にいるときにキューの中にあるパケットのことである．このとき，この確率変数  $N$  は幾何分布  $P[N = k] = (1 - \rho)\rho^k$  であり，メッセージと送信された符号語とは独立である．さらに，もしサービス中のパケットがあれば残りのサービス時間は期待値  $\frac{1}{\mu}$  の指数分布となる．

また，復号器は“パケット 0”のサーバーからの出発時刻が分かるとする．すなわち，復号器は  $N$  の値を知っているか，“パケット 0”を見分けることができるとする．このことより復号器は“パケット 0”の到着時刻を  $t = 0$  とし，その時刻より後に到着したパケットの復号を行う．このように“パケット 0”の到着時刻を復号器が分かるようにすることで，“パケット 0”の後の  $n$  個のパケットと同期を取ることができる．“パケット 0”の後に，符号器が送る残り  $n$  個のパケットを「符号語パケット」と呼ぶ．さらに

$A_i$  :  $i$  番目の到着間隔時間

$D_i$  :  $i$  番目の出発間隔時間

$S_i$  :  $i$  番目のサービス時間

$W_i$  :  $i$  番目の仕事をしていない時間

とする． $k$  番目に到着する時刻， $k$  番目に出発する時刻はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^k A_i, \sum_{i=1}^k D_i$$

である．また  $i$  番目の到着間隔時間  $D_i$ ， $i$  番目の仕事をしていない時間  $W_i$  はそれぞれ

$$D_i = S_i + W_i \quad (57)$$

$$W_i = \max \left( 0, \sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=0}^{i-1} D_j \right) \quad (58)$$

である．さらに“パケット 0”がキューに到着してからサーバーを出発するまでの時間を  $D_0$  とし

$$D_0 = U + S_0 \quad (59)$$

と表される．ここで， $D_0$  は出発間隔時間でないことに注意し， $U$  は平衡状態のキューの残りの仕事である．したがって  $U$  は独立した指数分布の確率変数の合計であり，その数は幾何分布である．ここで

$$E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = (1-\rho) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

よって

$$E[D_0] = E[S] E[N+1] = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\rho}{1-\rho} + 1 \right) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

であるので  $D_0$  は期待値  $\frac{1}{\mu - \lambda}$  の指数分布をとる．以上のような平衡状態のキューに対する符号が  $(n, M, T, \epsilon)$  符号であるとする．空のキューに対する  $(n+1, M, T, \frac{\epsilon}{1-\rho})$  符号が存在することが次のようにしてわかる．符号語は時刻  $t = 0$  の“パケット 0”を通常の符号語パケットとして含めるだけで元の符号のままとする．すると，最後のパケットがサーバーを出発する時刻の期待値は平衡状態のときに比べて増えないのは明らかである．また，復号器で観察可能なのは  $D^n = (D_0, D_1, \dots, D_n)$  だけであるが，復号器は  $D_0$  の時刻を  $t = 0$  とみなして同じ復号を行なうとする．すると，平衡状態のキューが空である確率は  $\Pr[N = 0] = 1 - \rho$  であるので，確実に空であるキューに対する復号誤り確率を用いると， $\epsilon$  は

$$\epsilon \geq (1 - \rho) \times (\text{空のキューに対する復号誤り確率})$$

と下から抑えられる．したがって空のキューに対する復号誤り確率は  $\frac{\epsilon}{1-\rho}$  以下である．これで空のキューに対する  $(n+1, M, T, \frac{\epsilon}{1-\rho})$  符号の存在が示された．ここで，[3] により正規化された情報密度を

$$\frac{1}{n} i_{A^n; D^n}(A^n; D^n) \equiv \frac{1}{n} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \quad (60)$$

とする．平衡状態のキューに対する入力  $A^n$  として，“パケット 0” に続いてポアソン到着に従う  $n$  個のパケットを考えると，すべての  $\gamma > 0$  において  $n \rightarrow \infty$  としたとき

$$\Pr \left[ \frac{1}{n} i_{A^n; D^n}(A^n; D^n) < \log \frac{\mu}{\lambda} - \gamma \right] \rightarrow 0 \quad (61)$$

となることが示される [1]．ここで

$$\frac{1}{n} \log M_n < \log \frac{\mu}{\lambda} - 2\gamma$$

なる  $M_n$  をとれば，付録 B の補題 1 より

$$\epsilon_n \leq \Pr \left[ \frac{1}{T_n} i_{A^n; D^n}(A^n; D^n) \leq \frac{1}{T_n} \log M_n + \gamma \right] \rightarrow 0 \quad (62)$$

を満たす  $(n, M_n, T_n, \epsilon_n)$  符号が存在することが示されるので，これ以降の議論は悲観的な符号化でも従来研究 [1] に帰着できる．よって  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\frac{n}{T_n} \frac{1}{n} i_{A^n; D^n}(A^n; D^n) \rightarrow \frac{n}{T_n} \log \frac{\mu}{\lambda} \rightarrow \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \quad (63)$$

となる．□

## 5.2 $\cdot/G/1$ キューの順定理

本節では，サービス分布が一般分布である  $\cdot/G/1$  キューにおいて狭義の通信路容量の順定理を示す．

定理 7 サービスレート  $\mu$  の  $\cdot/G/1$  キューシステムにおいて狭義の通信路容量  $C'$  とキューの狭義の通信路容量  $C'(\lambda)$  は以下を満たす．

$$C(\lambda) \geq \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \quad (0 < \lambda \leq \mu) \quad (64)$$

$$C \geq e^{-1} \mu \text{ [nat/s]} \quad (65)$$

証明 この証明では  $\cdot/G/1$  キューの相互情報量を最大にする必要はない．というのも，逆定理によって

$$C(\lambda) \leq \lambda \log \frac{\mu}{\lambda}$$

と求められているので

$$C(\lambda) \geq \lambda \log \frac{\mu}{\lambda}$$

であることを示す．まず， $A^n = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ， $D^n = (D_1, D_2, \dots, D_n)$  とする．さらに， $Q_{D^n}(\cdot)$  は  $D^n$  の確率密度関数， $Q_{D^n|A^n}(\cdot|a^n)$  は  $A^n = a^n$  の元での  $D^n$  の確率密度関数とする．すると，正規化された情報密度は

$$\frac{1}{n} i_{A^n; D^n}(A^n; D^n) \equiv \frac{1}{n} \log \frac{Q_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{Q_{D^n}(D^n)} \quad (66)$$

で表される．ところが上式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \log \frac{Q_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{Q_{D^n}(D^n)} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{Q_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)} - \frac{1}{n} \log \frac{Q_{D^n}(D^n)}{P_{D^n}(D^n)} + \frac{1}{n} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \end{aligned} \quad (67)$$

であり，[1] によると最初の二項は  $n \rightarrow \infty$  とすると 0 になる．よって

$$\frac{1}{n} \log \frac{Q_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{Q_{D^n}(D^n)} \rightarrow \frac{1}{n} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \quad (68)$$

とできる．これ以降は定理 6 の証明の際と同じように，悲観的な符号化でも [1] に帰着できる．

□

## 6 まとめ

従来研究の楽観的な符号化を元に，本研究では新たに条件の厳しい悲観的な符号化を定義した．悲観的な符号化では，符号語長  $n$  に関する符号の列に対し十分大きなすべての  $n$  で良い符号であることを要請するように新たに定義をしたので  $n$  を一つ大きくしても達成する符号が存在するという特徴がある．悲観的な符号化の元で，狭義の通信路容量とキューの狭義の通信路容量を定義した．従来研究において，パラメータ  $\lambda$  をとおしてキューの広義の通信路容量を求めることによって本来求めたい通信路全体の広義の通信路容量を求めることができることが証明されたが，本研究でも狭義の通信路容量とキューの狭義の通信路容量の同等性を導くことによって，従来研究と同様に議論を展開した．これに従い，狭義の通信路容量において逆定理，順定理それぞれを導き，狭義の通信路容量を導いた．通信路容量の値は従来研究と同じである．これにより，通信路容量を達成する符号の探索範囲を従来研究より狭くできるという知見が得られた．

## 謝辞

本研究を行うにあたって数多くのご指導をいただいた指導教員の西新幹彦准教授, また西新研究室の皆様へ感謝の意を表する.

## 参考文献

- [1] Venkat Anantharam, Sergio Verdú, “Bits Through Queues,” IEEE Transactions on Information Theory, vol. 42, no.1, p.4–18, January 1996.
- [2] 西村啓希, “パケット間隔で情報を送るシステムの符号構成について”, 信州大学大学院工学系研究科修士論文, 2010.
- [3] Sergio Verdú, Te Sun Han, “A General Formula for Channel Capacity,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.40, no.4, p.1147–1157, July 1994.
- [4] 韓太舜, “情報理論における情報スペクトル的方法”, 培風館, 1998.
- [5] Thomas M.Cover, Joy A.Thomas, “Elements of Information Theory,” John Wiley & Sons, Inc., 2006 .

## 付録 A $\liminf$ と $\limsup$ の関係

定理 2 の証明では  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  と  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  の関係を用いた．これを下に明らかにする．  
 $a_n > 0, b_n > 0$  の下で

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = C$$

とおく．また，以下を満たす十分小さい任意の  $\delta > 0$  を考える．

$$\frac{C}{1 - C\delta} - C > 0, \quad C - \frac{C}{1 + c\delta} > 0$$

任意の  $\epsilon > 0, \epsilon' > 0$  に対して

$$\begin{aligned} \text{十分大きなすべての } n \text{ で } \frac{1}{a_n} &\leq C + \epsilon \\ \text{無限個の } n \text{ で } \frac{1}{a_n} &\geq C - \epsilon' \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\epsilon = \frac{C}{1 - C\delta} - C, \quad \epsilon' = C - \frac{C}{1 + c\delta}$$

とすると

$$\frac{1}{C + \epsilon} = \frac{1}{C} - \delta, \quad \frac{1}{C - \epsilon'} = \frac{1}{C} + \delta$$

となる．これよりそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{十分大きなすべての } n \text{ で } a_n &\geq \frac{1}{C + \epsilon} = \frac{1}{C} - \delta \\ \text{無限個の } n \text{ で } a_n &\leq \frac{1}{C - \epsilon'} = \frac{1}{C} + \delta \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1}{C} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}} \\ \therefore \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

## 付録 B 符号の存在の証明

$A^n = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $D^n = (D_0, D_1, \dots, D_n)$  とする．さらに,  $P_{D^n}(\cdot)$  は  $D^n$  の確率密度関数,  $P_{D^n|A^n}(\cdot | a^n)$  は  $A^n = a^n$  の元での  $D^n$  の確率密度関数とする．これらを元に次

の補題を導く．この証明は [4] に基づくものであり，各変数を本研究に用いたものに置き換えたものである．

補題 1  $n$  を任意の自然数とする． $A^n$  および  $D^n$  をそれぞれ任意の分布の  $(\mathbb{R}^+)^n$  値および  $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$  値確率変数とする． $A^n$  と  $D^n$  は相関があってもよい．このとき，通信路  $P_{D^n|A^n}$  と任意の  $M_n$  に対して

$$\epsilon_n \leq \Pr \left[ \frac{1}{T_n} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \leq \frac{1}{T_n} \log M_n + \gamma \right] + e^{-T_n \gamma} \quad (69)$$

を満たす  $(n, M_n, T_n, \epsilon_n)$  符号が存在する．ただし， $\gamma > 0$  は任意の定数である．

証明 はじめに

$$i(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \log \frac{P_{D^n|A^n}(\mathbf{d}|\mathbf{a})}{P_{D^n}(\mathbf{d})} \quad (70)$$

とおき，さらに  $t > 0$  は任意の定数として  $\alpha = M_n e^{t\gamma}$  とおき，

$$\lambda_n \equiv P_r [i(A^n; D^n) \leq \log \alpha] + \frac{M_n}{\alpha} \quad (71)$$

とおく． $\lambda_n \geq 1$  のとき， $\epsilon_n \leq \lambda_n$  は明らかなので  $\lambda_n < 1$  として， $\epsilon_n \leq \lambda_n$  を導く．

まず， $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+)^n$  に対して

$$B(\mathbf{a}) = \{\mathbf{d} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} | i(\mathbf{a}; \mathbf{d}) \geq \log \alpha\}$$

とおき，任意の  $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+)^n$  に対して

$$\Pr[D^n \in B(\mathbf{a})] \leq \frac{1}{\alpha}$$

が成り立つことを示す． $\mathbf{d} \in B(\mathbf{a})$  なら

$$P_{D^n|A^n}(\mathbf{d}|\mathbf{a}) \geq \alpha P_{D^n}(\mathbf{d})$$

であるから

$$\begin{aligned} 1 &\geq P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a})|\mathbf{a}) \\ &= \int_{\mathbf{d} \in B(\mathbf{a})} P_{D^n|A^n}(\mathbf{d}|\mathbf{a}) d\mathbf{d} \\ &\geq \alpha \int_{\mathbf{d} \in B(\mathbf{a})} P_{D^n}(\mathbf{d}) d\mathbf{d} \\ &= \alpha \Pr[D^n \in B(\mathbf{a})] \end{aligned}$$

である．ここから，通信路  $P_{D^n|A^n}$  に対する符号を構成していく．まず最初の条件

$$P_{D^n|A^n}(B(u_1)|u_1) \geq 1 - \lambda_n$$

を満たす  $u_1 \in (\mathbb{R}^+)^n$  を任意に選んで  $D_1 = B(u_1)$  とおく．次に

$$P_{D^n|A^n}(B(u_2) - B(u_1)|u_2) \geq 1 - \lambda_n$$

なる  $u_2 \in (\mathbb{R}^+)^n$  を任意に選んで  $D_2 = B(u_2) - B(u_1)$  とおく．これを続けて  $L_n$  回目で停止したとすると,  $k = 1, 2, \dots, L_n$  に対して

$$P_{D^n|A^n}\left(B(u_k) - \bigcup_{i=1}^{k-1} B(u_i) \middle| u_i\right) \geq 1 - \lambda_n$$

が成立するが,  $L_n$  の定義により, すべての  $x \in (\mathbb{R}^+)^n$  に対して

$$P_{D^n|A^n}\left(B(x) - \bigcup_{i=1}^{L_n} B(u_i) \middle| x\right) < 1 - \lambda_n$$

である．そこで

$$D_k = B(u_k) - \bigcup_{i=1}^{k-1} B(u_i) \quad (k = 1, 2, \dots, L_n)$$

とおくと

$$P_{D^n|A^n}(D_k|u_k) \geq 1 - \lambda_n \quad (72)$$

となる．そこでこの  $D_k$  を  $u_k$  の復号領域とし, 符号を  $\{u_1, u_2, \dots, u_{L_n}\}$  とする．ここで,

$$F = \bigcup_{k=1}^{L_n} F_k \quad (73)$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \Pr[i(A^n; D^n) \geq \log \alpha] \\ &= \Pr[D^n \in B(A^n)] \\ &= \int_{\mathbf{a}} \Pr[D^n \in B(\mathbf{a}) \text{ かつ } A^n = \mathbf{a}] d\mathbf{a} \\ &= \int_{\mathbf{a}} \Pr[D^n \in B(\mathbf{a}) | A^n = \mathbf{a}] \Pr[A^n = \mathbf{a}] d\mathbf{a} \\ &= \int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a})|\mathbf{a}) P_{A^n}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \\ &= \int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a}) \cap F|\mathbf{a}) P_{A^n}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} + \int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a}) \cap F^c|\mathbf{a}) P_{A^n}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (74)$$

となる．(74) の第 1 項は

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a}) \cap F|\mathbf{a})P_{A^n}(\mathbf{a})d\mathbf{a} \\
& \leq \int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(F|\mathbf{a})P_{A^n}(\mathbf{a})d\mathbf{a} \\
& = \int_{\mathbf{a}} \Pr[D^n \in F|A^n = \mathbf{a}] \Pr[D^n \in B(\mathbf{a})|A^n = \mathbf{a}]d\mathbf{a} \\
& = \Pr[D^n \in F] \\
& = P_{D^n}(F) \\
& = \sum_{k=1}^{L_n} P_{D^n}(F_k) \\
& \leq \sum_{k=1}^{L_n} P_{D^n}(B(u_k)) \\
& \leq \alpha
\end{aligned} \tag{75}$$

となり，第 2 項は

$$P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a}) \cap F^c|\mathbf{a})P_{A^n}(\mathbf{a}) < 1 - \lambda_n$$

となるので

$$\int_{\mathbf{a}} P_{D^n|A^n}(B(\mathbf{a}) \cap F^c|\mathbf{a})P_{A^n}(\mathbf{a})d\mathbf{a} < 1 - \lambda_n \tag{76}$$

を得る．代入すると

$$\Pr[i(A^n; D^n) \geq \log \alpha] < \frac{L_n}{\alpha} + 1 - \lambda_n$$

が得られる．すなわち

$$\begin{aligned}
\lambda_n & < \Pr[i(A^n; D^n) < \log \alpha] + \frac{L_n}{\alpha} \\
& \leq \Pr[i(A^n; D^n) \geq \log \alpha] + \frac{L_n}{\alpha}
\end{aligned}$$

これに  $\lambda_n$  の定義を代入すると

$$\Pr[i(A^n; D^n) < \log \alpha] + \frac{M_n}{\alpha} < \Pr[i(A^n; D^n) < \log \alpha] + \frac{L_n}{\alpha}$$

よって

$$M_n < L_n$$

でなければならない．すると構成した符号  $\{u_1, \dots, u_{L_n}\}$  からサイズが  $M_n$  の部分符号  $\{u_1, \dots, u_{M_n}\}$  を取り出すことができる．この部分符号の誤り確率  $\epsilon_n$  は (72) より

$$\epsilon_n \equiv \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^{M_n} P_{D^n|A^n}(F_k^c|u_k) \leq \lambda_n \tag{77}$$

を満たす．さらに

$$\lambda_n = \Pr[i(A^n; D^n) \geq \log \alpha] + \frac{M_n}{\alpha}$$

より

$$\epsilon_n \leq \Pr[i(A^n; D^n) \geq \log \alpha] + \frac{M_n}{\alpha}$$

が得られる．ただし  $\alpha = M_n e^{t\gamma}$  に注意する．これより

$$\epsilon_n \leq \Pr \left[ \frac{1}{t} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \leq \frac{1}{t} \log M_n + \gamma \right] + e^{-t\gamma}$$

を満たす  $(n, M_n, \epsilon_n)$  符号が存在する．ところが,  $t > 0$  は任意の定数なので

$$\epsilon_n \leq \Pr \left[ \frac{1}{T_n} \log \frac{P_{D^n|A^n}(D^n|A^n)}{P_{D^n}(D^n)} \leq \frac{1}{T_n} \log M_n + \gamma \right] + e^{-T_n\gamma}$$

を満たす  $(n, M_n, T_n, \epsilon_n)$  符号が存在する．□