解答例

付録 C

問 C.1　例題 C.1 より，任意の自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx = 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \tag{†}$$

が成り立つ．よって，(†) より

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{n+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n \end{aligned}$$

となる．同様にして，(†) より

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{n+4}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) \\ &= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n+2}{2}\,\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= \frac{2(n+2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n(n+2) \end{aligned}$$

である．よって，

$$V(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$$

となる．

問 C.2　自由度 n の t 分布の確率密度関数を $p_n(x)$ とかき，それを変形すると

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left\{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

なので，$n\to\infty$ とすると

$$p_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

となる．よって，$p_n(x)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数に収束する．

問 C.3　(1)　$\alpha = 0.01$ に対する付表 l-4 より，$F_{6,8}(0.01) = 6.37$ である．

(2)　$\alpha = 0.025$ に対する付表 5-3 より，$F_{20,15}(0.025) = 2.76$ である．

(3)　F 分布の α 点の関係式 (C.1) より，

$$F_{15,9}(0.95) = F_{15,9}(1-0.05) = \frac{1}{F_{9,15}(0.05)}$$

である．$\alpha = 0.05$ に対する付表 5-2 より，$F_{9,15}(0.05) = 2.59$ なので，

$$F_{15,9}(0.95) = \frac{1}{2.59} = 0.39$$

となる．

問 C.4　標本は大標本なので，母平均の差の検定方式 (大標本の場合) を用いる．材料 A を使った部品の強度の平均値を μ_1，材料 B を使った部品の強度の平均値を μ_2 とする．帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\mathrm{H}_0\colon \mu_1 = \mu_2, \quad \mathrm{H}_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$$

と設定して，有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定する．棄却域は

$$|z| \geqq z(0.025) = 1.9600$$

である．$\overline{X}$ の実現値は $\bar{x}_1 = 120$，$\overline{Y}$ の実現値は $\bar{x}_2 = 115$ なので，検定統計量 Z の実現値は

$$z = \frac{120 - 115}{\sqrt{\dfrac{15^2}{99} + \dfrac{13^2}{99}}} = 2.5063$$

となり棄却域に入る．よって仮説 H_0 は棄却される．すなわち，材料 A を使った場合と材料 B を使った場合では，強度に差があるといえる．

問 C.5　等分散検定を行う．果樹園 A と果樹園 B のりんごの糖度の分散をそれぞれ σ_1^2，σ_2^2 とする．帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\mathrm{H}_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad \mathrm{H}_1\colon \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

と設定して，有意水準 $\alpha = 0.05$ で片側検定する．このとき，検定統計量は $F = U_2^2/U_1^2$ で，棄却域は

$$f \geqq F_{8,8}(0.05) = 3.44$$

となる．データから果樹園 A のりんごの糖度の不偏分散 u_1^2 と果樹園 B のりんごの糖度の不偏分散 u_2^2 を計算すると，$u_1^2 = 0.1225$，$u_2^2 = 0.515$ となる．よって，F の実現値は

$$f = \frac{0.515}{0.1225} = 4.20$$

となり棄却域に入る．ゆえに仮説 H_0 は棄却される．すなわち，果樹園 B のリンゴの方が果樹園 A のりんごより糖度のばらつきが大きいといえる．

問 C.6　優勝チームの選手の全安打を母集団とし，その中で単打，二塁打，三塁打，本塁打の比率をそれぞれ p，q，r，s とする．帰無仮説

$$\mathrm{H}_0\colon p = 0.526, q = 0.25, r = 0.061, s = 0.163$$

に対して，対立仮説を

$$\mathrm{H}_1\colon \mathrm{H}_0 \text{ が成り立たない}$$

と設定して，有意水準 $\alpha = 0.10$ で適合度検定する．棄却域は

$$x \geqq \chi_3^2(0.10) = 6.251$$

である．検定統計量 χ^2 の実現値は

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(835-1661\times 0.526)^2}{1661\times 0.526}+\frac{(403-1661\times 0.25)^2}{1661\times 0.25}\\
&\quad +\frac{(115-1661\times 0.061)^2}{1661\times 0.061}+\frac{(308-1661\times 0.163)^2}{1661\times 0.163}\\
&= 9.048
\end{aligned}$$

なので棄却域に入る．よって仮説 H_0 は棄却される．すなわち，優勝チームの安打数の比率は，全チームの安打数の比率と異なるといえる．

問 C.7　帰無仮説

$$H_0: \text{年代と好感度の高低には関連がない}$$

に対して，対立仮説を

$$H_1: \text{年代と好感度の高低には関連がある}$$

と設定して，有意水準 10%で独立性の検定を行う．棄却域は

$$x \geqq \chi_6^2(0.1) = 10.64$$

である．与えられた表から期待度数を求めれば下表となる．

	10 代	20 代	30 代	40 代
好き	$\frac{143\times 81}{300}$	$\frac{143\times 88}{300}$	$\frac{143\times 68}{300}$	$\frac{143\times 63}{300}$
嫌い	$\frac{116\times 81}{300}$	$\frac{116\times 88}{300}$	$\frac{116\times 68}{300}$	$\frac{116\times 63}{300}$
どちらでもない	$\frac{41\times 81}{300}$	$\frac{41\times 88}{300}$	$\frac{41\times 68}{300}$	$\frac{41\times 63}{300}$

検定統計量 χ^2 の実現値を (C.2) を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{41^2}{\frac{143\times 81}{300}}+\frac{43^2}{\frac{143\times 88}{300}}+\frac{31^2}{\frac{143\times 68}{300}}+\frac{28^2}{\frac{143\times 63}{300}}\\
&\quad +\frac{33^2}{\frac{116\times 81}{300}}+\frac{35^2}{\frac{116\times 88}{300}}+\frac{26^2}{\frac{116\times 68}{300}}+\frac{22^2}{\frac{116\times 63}{300}}\\
&\quad +\frac{7^2}{\frac{41\times 81}{300}}+\frac{10^2}{\frac{41\times 88}{300}}+\frac{11^2}{\frac{41\times 68}{300}}+\frac{13^2}{\frac{41\times 63}{300}}-300\\
&= 5.11
\end{aligned}$$

となり棄却域に入らない．よって仮説 H_0 は棄却できない．すなわち，年代と好感度の高低には関連があるとはいえない．