

解答例

付録 B

問 B.1 累積相対度数と累積配分比率を加えた表は

所得	度数	累積相対度数	累積配分比率
500	15	0.3	0.0607
1000	20	0.7	0.2227
4000	9	0.88	0.5142
10000	6	1	1

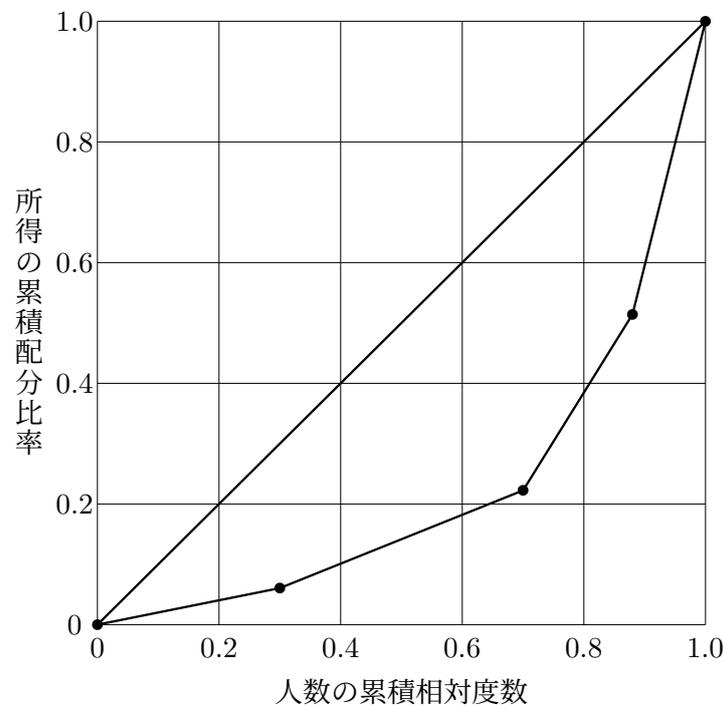
となる。よって、ローレンツ曲線と均等配分線で囲まれた図形 L の面積は

$$\begin{aligned} L &= 0.5 - \frac{1}{2} \{0.3 \times 0.0607 + 0.4 \times (0.0607 + 0.2227) \\ &\quad + 0.18 \times (0.2227 + 0.5142) + 0.12 \times (0.5142 + 1)\} \\ &= 0.277 \end{aligned}$$

となる。これよりジニ係数は

$$G.I. = L \times 2 = 0.554$$

となる。また、ローレンツ曲線は次の通り。



問 B.2 (B.1) 式を使うと、

$$q_i = \frac{\sum_{l=1}^i v_l f_l}{\sum_{m=1}^k v_m f_m}, \quad p_i = \frac{\sum_{l=1}^i f_l}{\sum_{m=1}^k f_m}$$

である。これより、 $q_i \leq p_i$ を示すためには、

$$\left(\sum_{l=1}^i v_l f_l \right) \left(\sum_{m=1}^k f_m \right) \leq \left(\sum_{l=1}^i f_l \right) \left(\sum_{m=1}^k v_m f_m \right)$$

を示せばよい。ここで、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=1}^i v_l f_l \right) \left(\sum_{m=1}^k f_m \right) &= \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^k v_l f_l f_m \\ &= \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^i v_l f_l f_m + \sum_{l=1}^i \sum_{m=i+1}^k v_l f_l f_m \\ &\leq \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^i v_l f_l f_m + \sum_{l=1}^i \sum_{m=i+1}^k v_m f_l f_m \\ &= \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^i v_m f_l f_m + \sum_{l=1}^i \sum_{m=i+1}^k v_m f_l f_m \\ &= \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^k v_m f_l f_m = \left(\sum_{l=1}^i f_l \right) \left(\sum_{m=1}^k v_m f_m \right) \end{aligned}$$

となる。式変形の中で、 $l \leq m$ ならば $v_l \leq v_m$ であることを使った。また、3行目から4行目への変形は、添え字の l と m を交換したあと、 \sum の順番を入れ替えている。以上より、 $q_i \leq p_i$ が示せた。

$q_i = p_i$ となるのは、上式の不等式の部分が等号になればよい。このためには、すべての l, m について $v_l = v_m$ であることが必要である。よって、すべての i に対して $q_i = p_i$ となるのは、すべての観測値 v_l が等しいとき、すなわち観測値が一つしかないときである。