

解答例

3.2 節

問9 母比率 p の二項母集団から抽出した大きさ n の標本を X_1, X_2, \dots, X_n とすると、各 X_i は二項分布 $B(1, p)$ に従うので、 $E[X_i] = p$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である。ここで $P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ なので、

$$E[P] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}(np) = p$$

となる。ゆえに標本比率 P は母比率 p の不偏推定量である。

問10 母集団は分散が既知の正規母集団なので、公式1が使える。99%信頼区間を求めるので $\alpha = 0.01$ である。よって $z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$ となる。また、 $n = 10$ 、 $\bar{x} = 127.4$ 、 $\sigma = 11.35$ である。これらを公式1に代入すると、

$$127.4 - \frac{11.35}{\sqrt{10}} \times 2.5758 \leq \mu \leq 127.4 + \frac{11.35}{\sqrt{10}} \times 2.5758$$

である。信頼下界は切り捨て、信頼上界は切り上げて信頼区間を求めると、 $118 \leq \mu \leq 137$ となる。

問11 標本の大きさを n 、母分散を σ^2 とすると、

$$x = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(0.05), \quad y = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(0.025), \quad z = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(0.005)$$

である。ここで、 $z(0.05) = 1.6449$ 、 $z(0.025) = 1.9600$ 、 $z(0.005) = 2.5758$ なので、求める連比は

$$1.6449 : 1.96 : 2.5758 = 1 : \frac{1.9600}{1.6449} : \frac{2.5758}{1.6449} = 1 : 1.1916 : 1.5659$$

となる。

問12 母集団は正規母集団であるが母分散が未知なので、 t 分布による母平均の区間推定の公式2を用いる。与えられたデータより、 $\bar{x} = 0.26688$ 、 $u = 0.03594$ 、8個のデータから90%信頼区間を求めるので、 $n = 8$ 、 $\alpha = 0.1$ である。よって $t_7(0.05) = 1.895$ となる。これらを公式に代入すると、

$$0.26688 - \frac{0.03594}{\sqrt{8}} \times 1.895 \leq \mu \leq 0.26688 + \frac{0.03594}{\sqrt{8}} \times 1.895$$

である。信頼下界は切り捨て、信頼上界は切り上げて信頼区間を求めると、 $0.242 \leq \mu \leq 0.291$ となる。

問13 母集団分布が未知であるが、大標本なので公式3が使える。与えられたデータより、 $n = 50$ 、 $\bar{x} = 68.7$ 、 $s = 11.5$ である。不偏分散の実現値 u^2 と標本分散の実現値 s^2 の関係式 $u^2 = \frac{n}{n-1} s^2$ より $u = 11.62$ となる。95%信頼区間を求めるので、 $\alpha = 0.05$ であり、 $z(0.025) = 1.96$ となる。これらを公式に代入すると、

$$68.7 - \frac{11.62}{\sqrt{50}} \times 1.96 \leq \mu \leq 68.7 + \frac{11.62}{\sqrt{50}} \times 1.96$$

である。信頼下界は切り捨て、信頼上界は切り上げて信頼区間を求めると、 $65.4 \leq \mu \leq 72.0$ となる。

問 14 $n = 500$ は十分に大きいので、母比率 p の区間推定の公式 4 が使える。公式に $n = 500$, $p_0 = 172/500 = 0.344$, $z(0.025) = 1.96$ を代入すると、

$$0.344 - \sqrt{\frac{0.344 \times 0.656}{500}} \times 1.96 \leq p \leq 0.344 + \sqrt{\frac{0.344 \times 0.656}{500}} \times 1.96$$

である。信頼下界は切り捨て、信頼上界は切り上げて信頼区間を求めると、 $0.30 \leq p \leq 0.39$ となる。よって、信頼区間を百分率で表せば、30%以上 39%以下となる。

問 15 母集団分布は正規分布と仮定しているので、公式 5 が使える。データから $\bar{x} = 40.13$, $u^2 = 1.58$ となる。また、 $\chi_9(0.005) = 23.59$, $\chi_9(0.995) = 1.735$ である。これらを公式に代入すると、

$$\frac{9 \times 1.58}{23.59} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \times 1.58}{1.735}$$

である。信頼下界は切り捨て、信頼上界は切り上げて信頼区間を求めると、 $0.7 \leq \sigma \leq 2.9$ となる。