解答例

3.1 節の節末問題

1.　$E(\overline{X})=4$，$V(\overline{X})=16/10=8/5$ である．

2.　$V(\overline{X})=25/n \leqq 2$ より，$n \geqq 12.5$．よって n の最小値は 13.

3.　$\overline{X}$ は $N(4,5/4)$ に従うので，$Z=(X-4)/(\sqrt{5}/2)=2(X-4)/\sqrt{5}$ は $N(0,1)$ に従う．よって

$$a=P(3<\overline{X}\leqq 5)=P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}<Z\leqq\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=P(-0.89<Z\leqq 0.89)$$
$$=2\times 0.3133=0.6266$$

$$b=P(\overline{X}\geqq 2)=P\left(Z\geqq-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=0.5+0.4633=0.9633$$

$$0.343=P(\overline{X}>c)=P\left(Z>\frac{2(c-4)}{\sqrt{5}}\right)$$

より，$2(c-4)/\sqrt{5}$ は正の数であり，$P(0\leqq Z\leqq 2(c-4)/\sqrt{5})=0.5-0.343=0.157$．よって，$2(c-4)/\sqrt{5}=0.4043$．よって，$c=4.452$.

4.　$\overline{X}$ は $N(-1,2)$ に従うので，$Z=(\overline{X}+1)/\sqrt{2}$ は $N(0,1)$ に従う．よって

$$a=P(0<\overline{X}\leqq 3)=P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<Z\leqq\frac{4}{\sqrt{2}}\right)=P(0.71<Z\leqq 2.83)$$
$$=0.4977-0.2611=0.2366$$

$$b=P(\overline{X}\geqq 1)=P(Z\geqq\sqrt{2})=0.5-0.4207=0.0793$$

$$0.729=P(\overline{X}<c)=P\left(Z<\frac{c+1}{\sqrt{2}}\right)$$

より，$(c+1)/\sqrt{2}$ は正の数であり，$P(0\leqq Z<(c+1)/\sqrt{2})=0.729-0.5=0.229$．よって，$(c+1)/\sqrt{2}=0.6098$．よって，$c=-0.1376$.

5.　大標本なので，標本に対する中心極限定理より，標本平均 $\overline{X}$ は $N(5,16/n)$ に従う．よって，$Z=(\overline{X}-5)/(4/\sqrt{n})=\sqrt{n}(\overline{X}-5)/4$ は $N(0,1)$ に従う．ここで，

$$0.02\geqq P(\overline{X}\geqq 6)=P\left(Z\geqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

より，$P(0\leqq Z<\sqrt{n}/2)=0.48$ で，$\sqrt{n}/4\geqq 2.0537$．よって，$n\geqq 67.48$ より，n の最小値は 68.

6.　大標本なので，標本に対する中心極限定理より，標本平均 $\overline{X}$ は $N(-3,12/n)$ に従う．よって，$Z=(\overline{X}+3)/(\sqrt{12}/\sqrt{n})=\sqrt{n}(\overline{X}+3)/\sqrt{12}$ は $N(0,1)$ に従う．ここで，

$$0.05\geqq P(\overline{X}<-4)=P\left(Z<-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{12}}\right)$$

より，$P(0 \leqq Z < \sqrt{n}/\sqrt{12}) \geqq 0.45$ で，$\sqrt{n}/\sqrt{12} \geqq 1.6449$．よって，$n \geqq 32.5$ より，n の最小値は 33.

7.　大標本なので，標本に対する中心極限定理より，標本平均 $\overline{X}$ はほぼ $N(170, 25/n)$ に従う．よって，$Z = (\overline{X} - 170)/(5/\sqrt{n}) = \sqrt{n}(\overline{X} - 170)/5$ は $N(0,1)$ に従う．ここで，

$$\begin{aligned} 0.99 \leqq P(169 < \overline{X} < 171) &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} < Z < \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \\ &= 2P\left(0 \leqq Z < \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \end{aligned}$$

より，$P(0 \leqq Z < \sqrt{n}/5) \geqq 0.495$ で，$\sqrt{n}/5 \geqq 2.5758$．よって，$n \geqq 165.9$ より，n は 166 以上であればよい.

8.　表が出る回数 N は，母比率 $p = 1/2$ の二項母集団から抽出した大きさ 400 の標本の標本度数である．よって，

$$Z = \frac{N - 400 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{400 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}} = \frac{N - 200}{10}$$

は $N(0,1)$ に従う．そこで，離散型確率変数を連続型確率変数で近似する際の補正項を考慮して，表が 210 回以上出る確率を計算すると，

$$P(N \geqq 210) = P\left(Z \geqq \frac{209.5 - 200}{10}\right) = P(Z \geqq 0.95) = 0.5 - 0.3289 = 0.1711$$

となる.

9.　画鋲が下向きになる回数 N は，母比率 $p = 1 - 0.6 = 0.4$ の二項母集団から抽出した大きさ 100 の標本の標本度数である．よって，

$$Z = \frac{N - 100 \times 0.4}{\sqrt{100 \times 0.4 \times (1 - 0.4)}} = \frac{N - 40}{\sqrt{24}}$$

は $N(0,1)$ に従う．そこで，離散型確率変数を連続型確率変数で近似する際の補正項を考慮して，下向きの画鋲が 50 個以上になる確率を計算すると，

$$\begin{aligned} P(N \geqq 50) = P\left(Z \geqq \frac{49.5 - 40}{\sqrt{24}}\right) &= P(Z \geqq 1.94) \\ &= 0.5 - 0.4738 = 0.0262 \end{aligned}$$

となる.

10.　予約した n 人の中で，飛行機に搭乗するために実際に飛行場に来た乗客の人数 N は，母比率 $p = 1 - 0.08 = 0.92$ の二項母集団から抽出した大きさ n の標本の標本度数である．よって，

$$Z = \frac{N - 0.92n}{\sqrt{n \times 0.92 \times 0.08}} = \frac{25\left(N - \frac{23n}{25}\right)}{\sqrt{46n}}$$

は $N(0,1)$ に従う．そこで，離散型確率変数を連続型確率変数で近似する際の補正項を考慮して，オーバーブッキングが起こる確率を計算すると，

$$P(N \geqq 351) = P\left(Z \geqq \frac{25\left(350.5 - \frac{23n}{25}\right)}{\sqrt{46n}}\right)$$

となる．この確率が 0.001 以下となるには

$$\Phi\left(\frac{25\left(350.5-\frac{23n}{25}\right)}{\sqrt{46n}}\right)=P\left(0\leqq Z\leqq\frac{25\left(350.5-\frac{23n}{25}\right)}{\sqrt{46n}}\right)\geqq 0.5-0.001=0.499$$

となればよい．ゆえに，

$$\frac{25\left(350.5-\frac{23n}{25}\right)}{\sqrt{46n}}\geqq 3.0902$$

であればよい．$n=363$ は上式を満たすが，$n=364$ のときは満たさない．よって，予約の受け入れは 363 人以下にすればよい．

11.　χ^2 分布表から読み取る．

(1)　$k=10.85$.

(2)　$P(X\geqq k)=0.025$ より，$k=34.17$.

(3)　$P(10.85<X<19.34)=P(X>10.85)-P(X>19.34)=0.950-0.500=0.450$

(4)　$P(X>7.434)=0.995$ より，$P(X>k)=0.005$．よって，$k=40.00$.

12.　標本分散を S^2 とすると，$2S^2$ は自由度 9 の χ^2 分布に従う．よって，

$$P(S^2\leqq 1.35)=P(2S^2\leqq 2.7)=P(\chi^2\leqq 2.7)=1-0.975=0.025$$

13.　$20U^2/9$ は自由度 20 の χ^2 分布に従う．よって，

$$P(U^2>12.785)=P(\chi^2>28.41)=0.1$$

14.　$nS^2/8$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．よって，

$$0.9\leqq P(S^2<12)=P(\chi^2<3n/2)$$

より，$P(\chi^2>3n/2)\leqq 0.1$ である．χ^2 分布の 0.100 のところを縦にみて，$3n/2$ の値と比べると（自由度は $n-1$ であることに注意），$n=8$ のときは上式が満たされず，$n=9$ のときは上式が満たされる．よって，n は 9 以上であればよい．

15.　t 分布表から読み取る．

(1)　$P(T>k)=0.01$ より，$k=2.508$.

(2)　$P(T>k)=0.25$ より，$k=0.686$.

(3)　$P(T>-1.061)=1-P(T<-1.061)=1-0.15=0.85$.

16.　t 分布表から読み取る．

(1)　$P(T>k)=0.025$ より，$k=2.131$.

(2)　$P(|T|\geqq k)=0.2$ より $P(T\geqq k)=0.1$ なので，$k=1.341$.

(3)　$P(|T|>1.753)=2P(T>1.753)=2\times 0.05=0.1$.