解答例

3.1 節

問 1　$V(\overline{X}) = 28/n \leqq 3$ より，$n \geqq 28/3 = 9.3$ となる．よって $n = 10$ である．

問 2　母集団から抽出した大きさ n の標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とすると，$E[X_i] = \mu$，$V[X_i] = 1\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ である．よって，$E[X_i^2] = V[X_i] + E[X_i]^2 = 1 + \mu^2$ で，$i \neq j$ ならば $E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j] = \mu^2$ となる．ここで

$$\overline{X}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right)$$

なので，

$$\begin{aligned}
E\left[\overline{X}^2\right] &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] + 2\sum_{i<j} E[X_i X_j]\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{n(1+\mu^2) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\mu^2\right\} \\
&= \frac{1}{n} + \mu^2
\end{aligned}$$

となる．ゆえに $\overline{X}^2$ は μ^2 の不偏推定量ではないが，

$$E\left[\overline{X}^2 - \frac{1}{n}\right] = \mu^2$$

なので，$\overline{X}^2 - \dfrac{1}{n}$ が μ^2 の不偏推定量となる．

問 3　$\overline{X}$ は $N(1, 0.3)$ に従うので，

$$\begin{aligned}
a &= P\left(Z < \frac{0.5-1}{\sqrt{0.3}}\right) = P(Z < -0.91) \\
&= 0.5 - \Phi(0.91) = 0.5 - 0.3186 = 0.1814
\end{aligned}$$

となる．同様に

$$\begin{aligned}
b &= P\left(\frac{0-1}{\sqrt{0.3}} < Z \leqq \frac{2.5-1}{\sqrt{0.3}}\right) = P(-1.83 < Z \leqq 2.74) \\
&= \Phi(1.83) + \Phi(2.74) = 0.4664 + 0.4969 = 0.9633
\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}
0.77 &= 1 - P(|\overline{X} - 1| > c) = P(|\overline{X} - 1| \leqq c) = P(1 - c \leqq \overline{X} \leqq 1 + c) \\
&= P\left(\frac{-c}{\sqrt{0.3}} \leqq Z \leqq \frac{c}{\sqrt{0.3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{0.3}}\right)
\end{aligned}$$

なので，$\Phi\left(\dfrac{c}{\sqrt{0.3}}\right) = 0.385$．よって，$\dfrac{c}{\sqrt{0.3}} = 1.2004$ より $c = 0.657$．

問 4　大標本なので，標本に対する中心極限定理より，$\overline{X}$ は $N\left(10, \dfrac{5}{n}\right)$ に従う．

$$P(\overline{X} < 9.5) = P\left(Z < \frac{9.5-10}{\sqrt{5/n}}\right) = P\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}}\right)$$

なので，$P(\overline{X} < 9.5) < 0.015$ となるには，$\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}}\right) > 0.485$ であればよい．よって，正規分布表 II より $\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}} > 2.1701$，すなわち $n > 94.2$ となる．ゆえに n の最小値は 95 である．

問 5　献血者の中で血液型が AB 型の人数を N とすると，N は母比率 $p = 0.09$ の二項母集団から抽出した大きさ 100 の標本の標本度数である．よって

$$Z = \frac{N - 100 \times 0.09}{\sqrt{100 \times 0.09 \times 0.91}} = \frac{N-9}{2.862}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．そこで，求める確率を離散型確率変数を連続型確率変数で近似する際の補正項を考慮して計算すると，

$$\begin{aligned} P(N \leqq 7) &= P\left(Z \leqq \frac{7.5-9}{2.862}\right) = P(Z \leqq -0.52) \\ &= 0.5 - \Phi(0.52) = 0.5 - 0.1985 = 0.3015 \end{aligned}$$

となる．

問 6　(1)　$P(11.52 < X < k) = P(X > 11.52) - P(X \geqq k) = 0.99 - P(X \geqq k) = 0.94$ なので $P(X \geqq k) = 0.05$ となる．よって $k = \chi^2_{25}(0.05) = 37.65$ である．
(2)　$P(13.12 < X < 40.65) = P(X > 13.12) - P(X \geqq 40.65) = 0.975 - 0.025 = 0.95$ である．

問 7　定理 7 より $\chi^2 = \dfrac{30}{3.3}S^2$ は自由度 29 の χ^2 分布に従う．よって

$$\begin{aligned} P(S^2 < 4.682) &= P\left(\chi^2 < \frac{30 \times 4.682}{3.3}\right) = P(\chi^2 < 42.56) \\ &= 1 - P(\chi^2 \geqq 42.56) \end{aligned}$$

である．ここで $\chi^2_{29}(0.05) = 42.56$ なので，求める確率は $1 - 0.05 = 0.95$ となる．

問 8　(1)　$P(T > k) = 0.9$ なので $k < 0$ である．よって，$P(T \geqq -k) = 0.1$ となる k の値を求めればよい．ゆえに $-k = t_{20}(0.1) = 1.325$ より，$k = -1.325$ となる．
(2)　$P(T \geqq k) = 0.01$ となる k の値を求めればよい．ゆえに $k = t_{20}(0.01) = 2.528$ である．
(3)　$P(-1.064 < T \leqq 2.845) = 1 - P(T \geqq 2.845) - P(T \geqq 1.064)$ である．ここで $t_{20}(0.005) = 2.845$，$t_{20}(0.15) = 1.064$ なので，求める確率は $1 - 0.005 - 0.15 = 0.845$ となる．