解答例

1.2 節の節末問題

1. 確率分布表と分布関数は

X	0	1	計
確率	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/2 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x \geqq 1) \end{cases}$$

で，期待値と分散は

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad V[X] = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} - E[X]^2 = \frac{1}{4}.$$

2. 確率分布は

X	1	2	$\cdots$	9	10	計
確率	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

であり，表より，

$$P(X = 2) = \frac{1}{10}, \qquad P(X \geqq 5) = \sum_{k=5}^{10} P(X = k) = \frac{3}{5}$$

である．分布関数は $n = 1, 2, \ldots, 9$ として，

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ n/10 & (n \leqq x < n+1) \\ 1 & (x \geqq 10) \end{cases}$$

となる．期待値と分散は

$$E[X] = \sum_{n=1}^{10} n \times \frac{1}{10} = \frac{11}{2}, \quad V[X] = \sum_{n=1}^{10} n^2 \times \frac{1}{10} - E[X]^2 = \frac{33}{4},$$

3. 確率の和が 1 であるので，$p = 1/12$ である．また，表より

$$P(X \geqq 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$$

である．期待値と分散は

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 9 \times \frac{1}{12} + 16 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{6},$$

$$V[X] = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} + 9^2 \times \frac{1}{12} + 16^2 \times \frac{1}{24} - E[X]^2 = \frac{539}{36}.$$

4. $E[X] = 7/2$, $V[X] = 35/12$ より，$E[4X] = 14$, $V[4X] = 140/3$ である．また，$\sin(\pi X/2)$ の期待値は

$$E[\sin(\pi X/2)] = \{1 + 0 + (-1) + 0 + 1 + 0\} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

分散は

$$V[\sin(\pi X/2)] = \left\{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2\right\} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} = \frac{17}{36}.$$

5. (a)　求める確率は

$$P(0 \leqq X \leqq 3) = \int_0^3 p(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5}$$

$$P(X \geqq 2) = \int_2^\infty p(x)dx = \int_2^6 \frac{1}{5}dx = \frac{4}{5}$$

である．分布関数は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ \dfrac{x-1}{5} & (1 \leqq x < 6) \\ 1 & (x \geqq 6) \end{cases}$$

であり，期待値と分散は

$$E[X] = \int_1^6 x \times \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^6 = \frac{7}{2}$$

$$V[X] = \int_1^6 x^2 \times \frac{1}{5}dx - E[X]^2 = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^6 - \frac{49}{4} = \frac{25}{12}.$$

(b)　求める確率は

$$\begin{aligned} P(0 \leqq X \leqq 3) &= \int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{2}\sin x dx = \left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 3) \\ P(X \geqq 2) &= \int_2^\infty p(x)dx = \int_2^\pi \frac{1}{2}\sin x dx = \left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_2^\pi \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2) \end{aligned}$$

である．分布関数は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \dfrac{1}{2}(1 - \cos x) & (0 \leqq x < \pi) \\ 1 & (x \geqq \pi) \end{cases}$$

であり，期待値と分散は

$$E[X] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$V[X] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - E[X]^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

(c)　求める確率は

$$\begin{aligned} P(0 \leqq X \leqq 3) &= \int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{2}e^{-x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-3}) \\ P(X \geqq 2) &= \int_2^{\infty} p(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_2^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2} \end{aligned}$$

である．分布関数は

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & (x < 0) \\ \frac{1}{2}(2 - e^{-x}) & (x \geqq 0) \end{cases}$$

であり，期待値と分散は

$$E[X] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 xe^x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 0$$

$$\begin{aligned} V[X] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx - E[X]^2 \\ &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2 \end{aligned}$$

6.　(a)　$\displaystyle\int_{-2}^2 (-x^2+4)dx = 32/3$ より，$a = 3/32$

(b)　X の期待値と分散は

$$E[X] = \frac{3}{32}\int_{-2}^2 x(-x^2+4)dx = 0$$

$$V[X] = \frac{3}{32}\int_{-2}^2 x^2(-x^2+4)dx - E[X]^2 = \frac{4}{5}$$

(c)　上の計算より $E[3X] = 3E[X] = 0$，$V[3X] = 9V[X] = 36/5$

(d)　X^3 の期待値と分散は

$$E[X^3] = \frac{3}{32}\int_{-2}^2 x^3(-x^2+4)dx = 0$$

$$V[X^3]=\frac{3}{32}\int_{-2}^{2}x^6(-x^2+4)dx-E[X^3]^2=\frac{64}{21}$$

7.　確率分布は

X	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

であり，期待値と分散は

$$E[X]=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{8}{27}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3}$$

$$V[X]=0^2\times\frac{16}{81}+1^2\times\frac{32}{81}+2^2\times\frac{8}{27}+3^2\times\frac{8}{81}+4^2\times\frac{1}{81}-E[X]^2=\frac{8}{9}.$$

なお，$E[X]=np$，$V[X]=np(1-p)$ を使っても求めることができる．

8.　X をパラメータ 1 のポアソン分布に従うとするとき，求める確率は以下の通り．

(1)　$P(X=0)=\dfrac{1}{e}$　　(2)　$P(X=2)=\dfrac{1}{2e}$

9.　X をパラメータ 2 のポアソン分布に従うとするとき，求める確率は $P(X=0)=1/e^2$ である．

10.　X をパラメータ 4 のポアソン分布に従うとするとき，$P(X=0)=1/e^4$，$P(X=1)=4/e^4$ より，求める確率は

$$P(X\geqq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{5}{e^4}$$

である．

11.　正規分布表 I を用いて求める．　(1)　$P(0\leqq X\leqq 1.28)=0.3997$

(2)　$P(-2.56\leqq X\leqq 1.6)=P(0\leqq X\leqq 2.56)+P(0\leqq X\leqq 1.6)=0.4948+0.4452=0.94$

(3)　$P(X<0.64)=P(-\infty\leqq X<0)+P(0\leqq X<0.64)=0.5+0.2389=0.7389$

(4)　$P(X<-0.32)=0.5-P(0\leqq X\leqq 0.32)=0.5-0.1255=0.3745$

12.　正規分布表 II を用いて求める．　(1)　$k=0.6526$

(2)　$0.343=P(k\leqq X\leqq 0)=P(0\leqq X\leqq -k)$ より，$k=-1.0069$.

(3)　$P(k\leqq X)=0.729$ より，$k<0$ である．これより，$P(k\leqq X\leqq 0)+P(X\geqq 0)=P(0\leqq X\leqq -k)+0.5$．よって，$P(0\leqq X\leqq -k)=0.229$ より $k=-0.6098$.

(4)　$P(X<k)=0.216$ より，$k<0$ である．よって $P(k\leqq X\leqq 0)=0.5-0.216=0.284$. よって $k=-0.7858$.

13.　(1)　$Z=(X-5)/4$ は $N(0,1)$ に従い，

$$P(0<X<10)=P(-1.25<Z<1.25)=2\times 0.3944=0.7888$$

(2)　$Z=(X+3)/6$ は $N(0,1)$ に従い，

$$P(X>1)=P\left(Z>\frac{2}{3}\right)=P(Z>0.67)=0.5-0.2486=0.2514$$

(3)　$Z=(X+5)/\sqrt{5}$ は $N(0,1)$ に従い，

$$P(X>-9)=P\left(Z>-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=P(Z>-1.79)=0.4633+0.5=0.9633$$

14.　(1)　$Z=(X-5)/4$ は $N(0,1)$ に従い，

$$0.25=P(5\leqq X\leqq k)=P\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-5}{4}\right)$$

より，$(k-5)/4=0.6745$．よって，$k=7.698$.
(2)　$Z=(X+2)/5$ は $N(0,1)$ に従い，

$$0.625=P(X\leqq k)=P\left(Z\leqq\frac{k+2}{5}\right)=0.5+P\left(0\leqq Z\leqq\frac{k+2}{5}\right)$$

より，$(k+2)/5=0.3186$．よって，$k=-0.407$.
(3)　$Z=(X-3)/2\sqrt{10}$ は $N(0,1)$ に従い，

$$0.121=P(X>k)=P\left(Z>\frac{k-3}{2\sqrt{10}}\right)=0.5-P\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-3}{2\sqrt{10}}\right)$$

より，$(k-3)/2\sqrt{10}=1.17$．よって，$k=10.3997$.

15.　試験の得点を X とすると，これは $N(45,20^2)$ に従うので，$Z=(X-45)/20$ は $N(0,1)$ に従う.
(1)　X が 50 点以上である確率は

$$P(X\geqq 50)=P\left(Z\geqq\frac{1}{4}\right)=P(Z\geqq 0.25)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 0.25)=0.4013$$

より，50 点の受験者はおよそ $10000\times 0.4013=4013$ 番目である.
(2)　$P(k\leqq X)=3000/10000=0.3$ となる k を求めると，

$$0.3=P(X\geqq k)=P\left(Z\geqq\frac{k-45}{20}\right)=0.5-P\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-45}{20}\right)$$

より，$(k-45)/20=0.5244$．よって，$k=55.488$．よっておよそ 55 点である.

16.　新成人の身長を X とすると，これは $N(171,6^2)$ に従うので，$Z=(X-171)/6$ は $N(0,1)$ に従う.
(1)　X が 160cm 以上である確率は

$$P(X\geqq 160)=P\left(Z\geqq-\frac{11}{6}\right)=P(Z\geqq -1.83)=0.5+0.4664=0.9664$$

である．よって身長 160cm の新成人はおよそ $650000\times 0.9664=628160$ 番目である.
(2)　$P(X\geqq k)=200000/650000=0.308$ となる k を求めると，

$$0.308=P(X\geqq k)=P\left(Z\geqq\frac{k-171}{6}\right)=0.5-P\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-171}{6}\right)$$

より，$(k-171)/6=0.5015$．よって，$k=174.009$．よっておよそ 174cm である.

17. 表が出る回数を X とすると，X は $B(100, 1/2)$ に従うので，

$$Z = \frac{X - 100 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)}} = \frac{X - 50}{5}$$

はほぼ $N(0, 1)$ に従う．よって，

$$P(X \geqq 60) = P\left(Z \geqq \frac{59.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geqq 1.9) = 0.5 - 0.4713 = 0.0287$$

18. 1 の目の出る回数を X とすると，X は $B(120, 1/6)$ に従い，

$$Z = \frac{X - 120 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)}} = \frac{\sqrt{3}\,(X - 20)}{5\sqrt{2}}$$

はほぼ $N(0, 1)$ に従う．よって，

$$\begin{aligned} P(X \leqq 24) &= P\left(Z \leqq \frac{\sqrt{3}\,(24.5 - 20)}{5\sqrt{2}}\right) = P(Z \leqq 1.10) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

19. 当たりの出る本数を X とすると，X は $B(100, 1/20)$ に従い，

$$Z = \frac{X - 100 \times \frac{1}{20}}{\sqrt{100 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right)}} = \frac{2(X - 5)}{\sqrt{19}}$$

はほぼ $N(0, 1)$ に従う．よって，

$$\begin{aligned} P(X \geqq 10) &= P\left(Z \geqq \frac{2\,(9.5 - 5)}{\sqrt{19}}\right) = P(Z \geqq 2.06) \\ &= 0.5 - 0.4803 = 0.0197 \end{aligned}$$

20. 求める確率は，同時確率分布表より

$$P(X = 0, Y = 5) = \frac{2}{9}, \qquad P(X \leqq 1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} P(1 \leqq X + Y \leqq 5) &= P(X = 0, Y = 5) + P(X = 2, Y = 0) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

である．周辺確率分布は

Y \ X	0	2	計
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
計	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

であり，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ を満たすので独立である．また，

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \quad E[Y] = 0 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

と

$$E[XY] = 0 \times 0 \times \frac{1}{9} + 0 \times 5 \times \frac{2}{9} + 2 \times 0 \times \frac{2}{9} + 2 \times 5 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$$

より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

となる．また，相関係数は $\rho(X,Y) = 0$ である．なお，独立であることから $\gamma(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$ としてもよい．

21. 求める確率は，同時確率分布表より

$$P(X=1, Y=-2) = 0$$
$$P(X+Y \geqq 0) = \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$
$$P(|X|+|Y| \geqq 4) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

である．周辺確率分布は

Y \ X	-2	-1	1	4	計
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
計	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

であり，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ を満たさないので独立でない．また，期待値を必要な項だけで計算すると

$$E[X] = -2 \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3},$$
$$E[Y] = -2 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

と

$$E[XY] = 4 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + (-8) \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{9} + = \frac{4}{3}$$

より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{3} - \frac{4}{27} = \frac{32}{27}$$

となる．X と Y の分散を計算すると，

$$V[X] = (-2)^2 \times \frac{1}{9} + (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{2}{9} - E[X]^2 = \frac{38}{9}$$

$$V[Y] = (-2)^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{5}{9} - E[Y]^2 = \frac{320}{81}$$

なので，相関係数は

$$\rho(X,Y) = \frac{\gamma(X,Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{95}}$$

となる。

22. まず，同時確率分布と周辺確率分布は

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6	計
-2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
-4	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
-6	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
-8	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
-10	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
-12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
計	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

であり，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ を満たさないので独立でない．例題 8 より，$E[X] = 7/2$，$V[X] = 35/12$ であるので，$E[Y] = E[-2X] = -7$，$V[Y] = V[-2X] = 35/3$ である．共分散は

$$\gamma(X,Y) = \frac{1}{6}(-2-8-18-32-50-72) - E[X]E[Y] = -\frac{182}{6} + \frac{49}{2} = -\frac{35}{6}$$

であり，相関係数は

$$\rho(X,Y) = -\frac{35}{6} \bigg/ \sqrt{\frac{35^2}{12 \times 3}} = -1$$

となる．

23. まず，同時確率分布と周辺確率分布は

$Y \backslash X$	0	1	2	計
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

であり，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ を満たさないので独立でない．また，

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad E[Y] = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E[XY] = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

である．これより共分散は

$$\gamma(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$$

である．X と Y の分散は

$$V[X] = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} - E[X]^2 = \frac{5}{9}$$

$$V[Y] = 1^2 \times \frac{1}{3} - E[Y]^2 = \frac{2}{9}$$

である．よって相関係数は

$$\rho(X,Y) = -\frac{1}{18} \Big/ \sqrt{\frac{5 \times 2}{9^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$$

である．

24. (1)　求める確率 $P(X \geqq 1, Y \geqq 1)$ は

$$P(X \geqq 1, Y \geqq 1) = \int_1^\infty \int_1^\infty p(x,y)dxdy = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{9}xydxdy$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{1}{18}x^2 y\right]_1^2 dy = \int_1^3 \frac{1}{6}ydy = \frac{2}{3}$$

である．また，$P(X+Y \geqq 2) = 1 - P(X+Y < 2)$ と

$$P(X+Y<2) = \iint_{x+y<2} p(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{1}{9}xydydx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{18}xy^2\right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \frac{1}{18}(x^3 - 4x^2 + 4x)dx$$

$$= \frac{2}{27}$$

より，$P(X+Y \geqq 2) = 25/27$ である．周辺確率密度関数 $p_1(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_0^3 \frac{1}{9}xydy = \frac{1}{2}x$$

であり，それ以外のとき 0 である．同様に，$p_2(y)$ は $0 \leqq y \leqq 3$ のとき

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{9}xydx = \frac{2}{9}y$$

であり，それ以外のとき 0 である．$p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$ なので，X と Y は独立である．X と Y が独立なので，共分散，相関係数はともに 0 である．

(2)　求める確率 $P(X \geqq 1, Y \geqq 1)$ は

$$P(X \geqq 1, Y \geqq 1) = \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} p(x,y)dxdy = \int_1^2\int_1^2 \frac{1}{8}(x+y)dxdy$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{16}\left[x^2+2xy\right]_1^2 dy = \int_1^2 \frac{1}{16}(3+2y)dy = \frac{3}{8}$$

である．

$$P(X+Y \geqq 2) = \iint_{x+y\geqq 2} p(x,y)dxdy = \int_0^2\int_{2-x}^2 \frac{1}{8}(x+y)dydx$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{16}\left[2xy+y^2\right]_{2-x}^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{16}(4x+x^2)dx$$
$$= \frac{2}{3}$$

である．周辺確率密度関数 $p_1(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy = \frac{1}{4}(x+1)$$

であり，それ以外のとき 0 である．同様に，$p_2(y)$ は $0 \leqq y \leqq 2$ のとき

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dx = \frac{1}{4}(y+1)$$

であり，それ以外のとき 0 である．$p(x,y) \neq p_1(x)p_2(y)$ なので，X と Y は独立でない．X の期待値と分散は

$$E[X] = \int_0^2 \frac{1}{4}x(x+1)dx = \frac{7}{6}$$

$$V[X] = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2(x+1)dx - E[X]^2 = \frac{11}{36}$$

となる．周辺確率密度関数が同じなので，Y の期待値と分散も同じ値である．次に

$$E[XY] = \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{8}xy(x+y)dxdy = \frac{4}{3}$$

より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = \frac{4}{3} - \frac{7^2}{6^2} = -\frac{1}{36}$$

となる．相関係数は

$$\rho(X,Y) = -\frac{1}{36} \Bigg/ \frac{11}{36} = -\frac{1}{11}$$

である．

(3)　確率を求めるために行う 2 重積分の積分範囲において，この確率密度関数は，(1) の確率密度関数の 1/2 である．よって，(1) より $P(X \geqq 1, Y \geqq 1) = 1/3$，$P(X+Y \geqq 2) = 25/54$ である．周辺確率密度関数 $p_1(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_0^3 \frac{1}{18}xydy = \frac{1}{4}x$$

であり，$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_{-3}^0 \frac{1}{18}xydy = -\frac{1}{4}x$$

であり，それ以外のとき 0 である．周辺確率密度関数 $p_2(y)$ は $0 \leqq y \leqq 3$ のとき

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{18}xydx = \frac{1}{9}y$$

であり，$-3 \leqq y \leqq 0$ のとき

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_{-2}^0 \frac{1}{18}xydx = -\frac{1}{9}y$$

であり，それ以外のとき 0 である．X の期待値と分散は,

$$E[X] = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2dx - \int_{-2}^0 \frac{1}{4}x^2dx = 0$$

$$V[X] = \int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx - \int_{-2}^0 \frac{1}{4}x^3 = 2$$

であり，Y の期待値と分散は

$$E[Y] = \int_0^3 \frac{1}{9}y^2dy - \int_{-3}^0 \frac{1}{9}y^2dy = 0$$

$$V[X] = \int_0^3 \frac{1}{9}y^3dy - \int_{-3}^0 \frac{1}{9}y^3dy = \frac{9}{2}$$

である．また,

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{18}x^2y^2dxdy + \int_{-3}^0 \int_{-2}^0 \frac{1}{18}x^2y^2dxdy \\ &= \frac{1}{9}\int_0^3 \int_0^2 x^2y^2dxdy = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる．よって共分散は

$$\gamma(X,Y)=\frac{8}{3}$$

であり，相関係数は

$$\rho(X,Y)=\frac{8}{3}\Bigg/\sqrt{\frac{9\times 2}{2}}=\frac{8}{9}$$

である．

25.　周辺確率密度関数 $p_1(x)$ は

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

であり，同様に

$$p_2(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$$

である．$p(x,y)=p_1(x)p_2(y)$ なので，X と Y は独立である．X と Y が独立なので，共分散，相関係数はともに 0 である．

26.　A クラスの生徒の得点を X，B クラスの生徒の得点を Y とすると，正規分布の再生性より，$X-Y$ は，$N(45-50,16^2+12^2)=N(-5,20^2)$ に従う．これより，$Z=(X-Y+5)/20$ は $N(0,1)$ に従い，

$$\begin{aligned}P(X-Y\geqq 0)&=P\left(Z\geqq\frac{5}{20}\right)=P(Z\geqq 0.25)=0.5-\Phi(0.25)\\&=0.5-0.987=0.4013\end{aligned}$$

となる．

27.　3 つの缶の内容量ををそれぞれ X_1，X_2，X_3 とするとき，$Y=X_1+X_2+X_3$ は $N(1005,75)$ に従うので，$Z=(Y-1005)/\sqrt{75}$ は $N(0,1)$ に従い，

$$P(Y\geqq 1000)=P(Z\geqq -1/\sqrt{3})=P(Z\geqq -0.58)=0.5+0.2190=0.7190$$

となる．

28.　例題 20 より，

$$P(|X-10|<k)=P\left(|X-10|<\frac{k}{3}\cdot 3\right)\geqq 1-\frac{9}{k^2}$$

なので，$1-\dfrac{9}{k^2}\geqq 0.95$ であればよい．よって，

$$k\geqq\sqrt{\frac{9}{0.05}}=6\sqrt{5}$$

であればよい．

29.　60 回の実験の測定値の算術平均を Y とするとき，$Z=\sqrt{60}\,(Y-45.8)/5.2$ は $N(0,1)$ に従う．これより，

$$\begin{aligned}P(46\leqq Y\leqq 48)&=P\left(\frac{\sqrt{60}}{5.2}(46-45.8)\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{60}}{5.2}(48-45.8)\right)\\&=P(0.30\leqq Z\leqq 3.28)=0.4995-0.1179=0.3816\end{aligned}$$

となる．