# 解答例

## 1.2 節

**問 10**　(1)　硬貨を 3 回投げるとき，表・裏の出方は次の 8 通りである．

(裏，裏，裏)，(裏，表，裏)，(表，裏，裏)，(裏，裏，表)
(裏，表，表)，(表，裏，表)，(表，表，裏)，(表，表，表)

確率はすべて $\dfrac{1}{8}$ なので，確率分布と分布関数 $F(x)$ は次のようになる．

| $X$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $6$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{3}{8}$ | $\dfrac{3}{8}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $1$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -3) \\ 1/8 & (-3 \leqq x < 0) \\ 1/2 & (0 \leqq x < 3) \\ 7/8 & (3 \leqq x < 6) \\ 1 & (x \geqq 6) \end{cases}$$

(2)　6 枚のカードから 3 枚のカードを引く場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ である．また，$X$ の取り得る値は $X = 3, 4, 5, 6$ である．$X = k$ となるカードの引き方は，1 から $k-1$ までの番号のついたカードから 2 枚引く場合の数だけある．つまり，${}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$ 通りある．よって，確率分布表と分布関数は次のようになる．

| $X$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\dfrac{1}{20}$ | $\dfrac{3}{20}$ | $\dfrac{6}{20}$ | $\dfrac{10}{20}$ | $1$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 3) \\ 1/20 & (3 \leqq x < 4) \\ 1/5 & (4 \leqq x < 5) \\ 1/2 & (5 \leqq x < 6) \\ 1 & (x \geqq 6) \end{cases}$$

**問 11**　(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ より，

$$1 = a\int_0^2 (2x - x^2)dx = a\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = a \cdot \frac{4}{3}.$$

ゆえに，$a = \dfrac{3}{4}$ である．また，分布関数は

- $x < 0$ のとき，$F(x) = 0$
- $0 \leqq x < 2$ のとき，$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \frac{3}{4}\int_0^x t(2-t)dt = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$
- $x \geqq 2$ のとき，$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \frac{3}{4}\int_0^2 t(2-t)dt = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 1$

なので，

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \dfrac{3}{4}\left(x^2-\dfrac{x^3}{3}\right) & (0\leqq x<2)\\ 1 & (x\geqq 2)\end{cases}$$

である．また，

$$P(X\geqq 1)=1-P(X<1)=1-F(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$ より，

$$1=\int_0^{\infty}e^{-ax}dx=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{a}.$$

ゆえに，$a=1$ である．また，分布関数は

- $x<0$ のとき，$F(x)=0$
- $x\geqq 0$ のとき，$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_0^x e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x=1-e^{-x}$

なので，

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1-e^{-x} & (x\geqq 0)\end{cases}$$

である．さらに，

$$P(X\geqq 1)=1-P(X<1)=1-F(1)=\frac{1}{e}.$$

**問 12** (1) 2 個のさいころを同時に投げるときの出る目の和とそれを 3 で割った余りは次のようになる．

| 和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| 余 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

ゆえに，確率分布表は次のようになる．

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

よって，

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1.$$

また，

$$E[X^2] = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

なので，$E[X - 2X^2] = E[X] - 2E[X^2] = 1 - 2 \times \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$.

(2) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{3}{8}\int_{-2}^{0} x^3 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = -\frac{3}{2}$.

また，$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{3}{8}\int_{-2}^{0} x^4 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = \frac{12}{5}$ なので，$E[X - 2X^2] = E[X] - 2E[X^2] = -\frac{3}{2} - 2 \times \frac{12}{5} = -\frac{63}{10}$.

**問 13**　(1)　2 個のさいころを同時に投げるときの出る目の和とそれを 4 で割った余りは次のようになる．

| 和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| 余 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |

ゆえに，確率分布表は次のようになる．

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{9}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | 1 |

よって，

$$E[X] = 0 \times \frac{9}{36} + 1 \times \frac{8}{36} + 2 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{10}{36} = \frac{56}{36} = \frac{14}{9}.$$

また，

$$E[X^2] = 0^2 \times \frac{9}{36} + 1^2 \times \frac{8}{36} + 2^2 \times \frac{9}{36} + 3^2 \times \frac{10}{36} = \frac{67}{18}$$

なので，分散は $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{67}{18} - \frac{196}{81} = \frac{211}{162}$.

(2)　部分積分より，

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 3\int_{0}^{\infty} xe^{-3x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-3x}dx$$

$$= \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^\infty = \frac{1}{3}.$$

同様に,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^\infty x^2 p(x)dx = 3\int_0^\infty x^2 e^{-3x}dx = 2\int_0^\infty xe^{-3x}dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-3x}dx = \frac{2}{3}\left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^\infty = \frac{2}{9}$$

なので, $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9}$.

**問 14** (1) $X$, $Y$ の確率分布表は次のようになる.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{8}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | 1 |

ゆえに, $X$, $Y$ はそれぞれ二項分布 $B\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$ に従う.

(2) $X+Y$ の取り得る値は $0, 1, 2, \cdots, 6$ なので, $X+Y$ が二項分布に従うとすると, $X+Y$ は $B(6, p)$ に従う. ここで, $X+Y=0$ となるのは, $X=Y=0$ のときのみなので,

$$(1-p)^6 = P(X+Y=0) = \frac{1}{27}.$$

ゆえに, $p = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[6]{27}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である. 一方, $X+Y=6$ となるのは, $X=Y=3$ のときのみなので,

$$p^6 = P(X+Y=6) = \frac{1}{216}$$

であり, $p = \dfrac{1}{\sqrt[6]{216}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. このとき, $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \neq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ であり, このような実数 $p$ は存在しない. よって, $X+Y$ は二項分布に従わない.

**問 15** 1 年間に降水量が 100mm 以上となる日数 $X$ は, パラメータ $\lambda = \dfrac{1}{6}$ のポアソン分布で近似できる.

(1) $P(X=0) = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{6}} = 0.8465$.

(2) $P(X \geqq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda = 1 - \dfrac{7}{6}e^{-\frac{1}{6}} = 1 - 0.9876 = 0.0124$

**問 16** (1) $Z = \dfrac{X-3}{\sqrt{20}}$ とすると, $Z$ は $N(0,1)$ に従う. よって,

$$P(5 < X < 10) = P\left(\frac{5-3}{\sqrt{20}} < Z < \frac{10-3}{\sqrt{20}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{20}}{10} < Z < \frac{7}{20}\sqrt{20}\right)$$
$$= P(0.45 < Z < 1.57) = \Phi(1.57) - \Phi(0.45)$$

$$= 0.4418 - 0.1736 = 0.2682.$$

(2)　$Z = \dfrac{X-5}{\sqrt{30}}$ とすると，$Z$ は $N(0,1)$ に従う．よって，

$$\begin{aligned} P(1 \leqq X < 4) &= P\left(\frac{1-5}{\sqrt{30}} \leqq X < \frac{4-5}{\sqrt{30}}\right) = P\left(-\frac{2}{15}\sqrt{30} \leqq Z < -\frac{\sqrt{30}}{30}\right) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{30}}{30} < Z \leqq \frac{2}{15}\sqrt{30}\right) = P\left(0.18 < Z \leqq 0.73\right) \\ &= \Phi(0.73) - \Phi(0.18) = 0.2673 - 0.0714 = 0.1959. \end{aligned}$$

(3) $Z = \dfrac{X-7}{2\sqrt{10}}$ とすると，$Z$ は $N(0,1)$ に従う．よって，

$$\begin{aligned} P(X \geqq 5) &= P\left(Z \geqq \frac{5-7}{2\sqrt{10}}\right) = P\left(Z \geqq -\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= 0.5 + P\left(Z < \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= 0.5 + \Phi(0.32) = 0.5 + 0.1255 = 0.6255. \end{aligned}$$

**問 17**　(1)　$Z = \dfrac{X-4}{\sqrt{15}}$ とすると，$Z$ は $N(0,1)$ に従う．また，$k < 4$ であり，

$$P(X \leqq k) = P\left(Z \leqq \frac{k-4}{\sqrt{15}}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{4-k}{\sqrt{15}}\right).$$

ゆえに，$\Phi\left(\dfrac{4-k}{\sqrt{15}}\right) = 0.1$ であり，$\dfrac{4-k}{\sqrt{15}} = 0.2533$．よって，$k = 4 - 0.2533 \times \sqrt{15} = 3.0190.$

(2)　$Z = \dfrac{X-6}{5}$ とすると，$Z$ は $N(0,1)$ に従う．また，$k < 6$ であり，

$$P(X > k) = P\left(Z \leqq \frac{k-6}{5}\right) = 0.5 + \Phi\left(\frac{6-k}{5}\right).$$

ゆえに，$\Phi\left(\dfrac{6-k}{5}\right) = 0.3$ であり，$\dfrac{6-k}{5} = 0.8416$．よって，$k = 6 - 0.8416 \times 5 = 1.792.$

(3)　$Z = \dfrac{X-8}{\sqrt{35}}$ とすると，$Z$ は $N(0,1)$ に従う．また，$k > 0$ であり，

$$\begin{aligned} P(|X-8| \leqq k) &= P(-k+8 \leqq X \leqq k+8) = P\left(-\frac{k}{\sqrt{35}} \leqq Z \leqq \frac{k}{\sqrt{35}}\right) \\ &= P\left(-\frac{k}{\sqrt{35}} \leqq Z \leqq \frac{k}{\sqrt{35}}\right) = 2\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{35}}\right). \end{aligned}$$

ゆえに，$\Phi\left(\dfrac{k}{\sqrt{35}}\right) = 0.25$ であり，$\dfrac{k}{\sqrt{35}} = 0.6745$．よって，$k = 0.6745 \times \sqrt{35} = 3.9904.$

**問 18**　試験の得点 $X$ は正規分布 $N(110, 33^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X-110}{33}$ とすると，$Z$ は

$N(0,1)$ に従う．

(1)　$P(X \geqq 170) = P\left(Z \geqq \dfrac{60}{33}\right) = P(Z \geqq 1.82) = 0.5 - \Phi(1.82) = 0.5 - 0.4656 = 0.0344$ であり，$500000 \times 0.0344 = 17200$．よって，170 点の受験者はおよそ 17200 番目である．

(2)　$P(X \geqq k) = \dfrac{300000}{500000} = \dfrac{3}{5} = 0.6$ となる $k$ を求めればよい．

$$P(X \geqq k) = P\left(Z \geqq \frac{k-110}{33}\right) = 0.5 + \Phi\left(\frac{110-k}{33}\right)$$

なので，$\Phi\left(\dfrac{110-k}{33}\right) = 0.1$ である．正規分布表Ⅱより，$\dfrac{110-k}{33} = 0.2533$ であり，$k = -0.2533 \times 33 + 110 = 101.6411$．よって，得点順位が 30 万番目の受験者の得点は，およそ 102 点である．

**問 19**　(1)　赤玉が出る回数を $X$ とすると，$X$ は二項分布 $B\left(500, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．ここで，

$$E[X] = 500 \times \frac{1}{2} = 250, \quad \sigma[X] = \sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

なので，$Z$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とすると，二項分布の正規近似より，求める確率は

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{240-0.5-250}{5\sqrt{5}} \leqq Z \leqq \frac{260+0.5-250}{5\sqrt{5}}\right) \\ &= P\left(-10.5 \times \frac{\sqrt{5}}{25} \leqq Z \leqq 10.5 \times \frac{\sqrt{5}}{25}\right) = P\left(|Z| \leqq 0.94\right) \\ &= 2\Phi(0.94) = 2 \times 0.3264 = 0.6528. \end{aligned}$$

(2)　黒玉でない玉が出る回数を $X$ とすると，$X$ は二項分布 $B\left(500, \dfrac{4}{5}\right)$ に従う．ここで，

$$E[X] = 500 \times \frac{4}{5} = 400, \quad \sigma[X] = \sqrt{500 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

なので，$Z$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とすると，二項分布の正規近似より，求める確率は

$$\begin{aligned} P\left(Z \leqq \frac{380+0.5-400}{4\sqrt{5}}\right) &= P\left(Z \leqq -19.5 \times \frac{\sqrt{5}}{20}\right) = P\left(Z \leqq -2.18\right) \\ &= 0.5 - \Phi(2.18) = 0.5 - 0.4854 = 0.0146. \end{aligned}$$

**問 20**　(1)　確率分布表は次のようになる．

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $Y$ の周辺確率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{24}$ | $\frac{2}{4}$ |
| 2 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $X$ の周辺確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
&P(1 \leqq X - Y \leqq 3) \\
&\quad = P((X,Y)=(1,0)) + P((X,Y)=(2,0)) + P((X,Y)=(3,0)) \\
&\qquad\quad + P((X,Y)=(2,1)) + P((X,Y)=(3,1)) + P((X,Y)=(4,1)) \\
&\qquad\quad + P((X,Y)=(3,2)) + P((X,Y)=(4,2)) + P((X,Y)=(5,2)) \\
&\quad = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．また，$X$，$Y$ の期待値は

$$
\begin{aligned}
E[X] &= (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \\
E[Y] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1
\end{aligned}
$$

である．さらに，

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= (1+2+3+4+5+6) \times 1 \times \frac{2}{24} \\
&\qquad + (1+2+3+4+5+6) \times 2 \times \frac{1}{24} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

なので，定理 13 の (2) より，共分散は

$$
\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} \times 1 = 0.
$$

よって，相関係数は

$$
\rho(X,Y) = \frac{\gamma(X,Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} = 0.
$$

(2)　2 個のさいころを投げるときの目の出方は

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

なので，確率分布表は次のようになる．

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $Y$ の周辺確率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $X$ の周辺確率 | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

ゆえに，

$$\begin{aligned}&P(1 \leqq X - Y \leqq 3)\\&\quad = P((X,Y) = (1,0)) + P((X,Y) = (2,0)) + P((X,Y) = (3,0))\\&\qquad\quad + P((X,Y) = (2,1)) + P((X,Y) = (3,1)) + P((X,Y) = (4,1))\\&\quad = \frac{23}{36}\end{aligned}$$

である．また，$X$，$Y$ の期待値は

$$E[X] = \frac{1 \times 11 + 2 \times 9 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 3 + 6 \times 1}{36} = \frac{91}{36}$$

$$E[Y] = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である．さらに，

$$E[XY] = \frac{1 \times 6 + 2 \times 4 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 2}{36} = \frac{11}{9}$$

なので，定理 13 の (2) より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{11}{9} - \frac{91}{36} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{24}.$$

また，

$$E[X^2] = \frac{1^2 \times 11 + 2^2 \times 9 + 3^2 \times 7 + 4^2 \times 5 + 5^2 \times 3 + 6^2 \times 1}{36} = \frac{301}{36}$$

$$E[Y^2] = \frac{1^2 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

なので，定理 7 の (1) より，$X$，$Y$ の分散は

$$V[X] = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}, \qquad V[Y] = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

よって，相関係数は

$$\rho(X,Y) = \frac{\gamma(X,Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} = \frac{-\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{2555}{1296}} \times \sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{\sqrt{2555}}.$$

**問 21**　(1)　$X$，$Y$ の周辺確率密度関数 $p_1(x)$，$p_2(y)$ はそれぞれ

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} -\dfrac{x+2}{20}\displaystyle\int_{-2}^{-1}(y-1)dy = \dfrac{x+2}{8} & (-2 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} -\dfrac{y-1}{20}\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+2)dx = -\dfrac{2}{5}(y-1) & (-2 \leqq y \leqq -1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であり，

$$\begin{aligned} P(0 \leqq X - Y \leqq 1) &= \iint_{0 \leqq x-y \leqq 1} p(x,y)dxdy \\ &= -\frac{1}{20}\int_{-2}^{-1} dy \int_{y}^{1+y}(x+2)(y-1)dx \\ &= -\frac{1}{40}\int_{-2}^{-1}(2y^2+3y-5)dy = \frac{29}{240}. \end{aligned}$$

また，$X$，$Y$ の期待値は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)dx = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}(x^2+2x)dx = \frac{2}{3}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)dy = -\frac{2}{5}\int_{-2}^{-1}(y^2-y)dy = -\frac{23}{15}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dy \\ &= -\frac{1}{20}\int_{-2}^{2}\left(\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)(y^2-y)dy\right)dx \\ &= -\frac{1}{20}\left(\int_{-2}^{2}(x^2+2x)dx\right)\left(\int_{-2}^{-1}(y^2-y)dy\right) = -\frac{46}{45} \end{aligned}$$

なので，定理 13 の (2) より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{46}{45} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{23}{15}\right) = 0.$$

よって，相関係数は

$$\rho(X,Y) = \frac{\gamma(X,Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} = 0.$$

(2)　$X$，$Y$ の周辺確率密度関数 $p_1(x)$，$p_2(y)$ はそれぞれ

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \displaystyle\int_0^1 \frac{y^2}{2}dy = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} y^2 + \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{4}dx = y^2 + \frac{2}{3} & (0 \leqq y \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であり，

$$\begin{aligned} P(0 \leqq X - Y \leqq 1) &= \iint_{0 \leqq x-y \leqq 1} p(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{1+y} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 (9y^2 + 3y + 1)dy = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

また，$X$，$Y$ の期待値は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x}{6}\right) dx = \frac{4}{3}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)dy = \int_0^1 \left(y^3 + \frac{2}{3}y\right) dy = \frac{7}{12}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\int_0^1 (x^3y + 2xy^3)dy\right)dx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^2 (x^3 + x)dx = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

なので，定理 13 の (2) より，共分散は

$$\gamma(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} \times \frac{7}{12} = -\frac{1}{36}.$$

また，

$$E[X^2] = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{18}\right]_0^2 = \frac{92}{45}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 \left(y^4 + \frac{2}{3}y^2\right) dy = \left[\frac{y^5}{5} + \frac{2}{9}y^3\right]_0^1 = \frac{19}{45}$$

なので，$X$，$Y$ の分散は，定理 7 の (1) より，

$$V[X] = \frac{92}{45} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{15}, \qquad V[Y] = \frac{19}{45} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{59}{720}.$$

よって，相関係数は

$$\rho(X,Y)=\frac{\gamma(X,Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{4}{15}}\times\sqrt{\frac{59}{720}}}=-\frac{5\sqrt{177}}{354}.$$

**問 22**　(1)　確率分布表は次のようになる．

| $Y$ \\ $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $Y$ の周辺確率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $X$ の周辺確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

同時確率 $p_{ij}$，周辺確率 $p_{i\bullet}$，$p_{\bullet j}$ $(i=1,2,3,4,5,6,\ j=0,1,2,3)$ は

$$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$$

を満たすので，$X$，$Y$ は独立である．

(2)　問 20 (2) の表にあるような目の出方なので，$P(X=1,Y=0)=0$ であり，$P(X=1)=\dfrac{1}{36}$，$P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$ となる．よって，

$$P(X=1,Y=0)\neq P(X=1)P(Y=0)$$

であり，$X$，$Y$ は独立ではない．

**問 23**　(1)　$X$，$Y$ の周辺確率密度関数 $p_1(x)$，$p_2(y)$ は

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}-\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2} & (-3\leqq x\leqq -2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{2} & (1\leqq y\leqq 2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

なので，$p_1(-2)=\dfrac{9}{10}$，$p_2(2)=\dfrac{7}{6}$ である．一方，$p(-2,2)=\dfrac{16}{15}$ であり，$p(-2,2)\neq p_1(-2)p_2(2)$．よって，$X$，$Y$ は独立ではない．

(2)　$X$，$Y$ の周辺確率密度関数 $p_1(x)$，$p_2(y)$ は

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4} & (-1\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(y-1) & (2 \leqq y \leqq 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

なので，すべての $x$，$y$ に対して $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$ が成り立つ．よって，$X$，$Y$ は独立である．

**問 24**　男性と女性の身長をそれぞれ $X$，$Y$ とする．$X$，$Y$ は正規分布 $N(170, 5.3^2)$，$N(157, 6.9^2)$ に従うので，独立性と再生性より，$X - Y$ は $N(13, 75.7)$ に従う．$Z = \dfrac{X - Y - 13}{\sqrt{75.7}}$ とおくと，$Z$ は $N(0,1)$ に従うので，正規分布表 I より，

$$\begin{aligned} P(X - Y < 0) &= P\left(Z < \frac{0-13}{\sqrt{75.7}}\right) = P(Z < -1.49) \\ &= 0.5 - \Phi(1.49) = 0.5 - 0.4319 = 0.0681. \end{aligned}$$

**問 25**　例題 20 で証明された式を用いれば，

$$P(|X-5| < k) = P\left(|X-5| < \frac{k}{2} \cdot 2\right) \geqq 1 - \frac{4}{k^2}$$

となる．よって，$1 - \dfrac{4}{k^2} \geqq 0.85$ であればいいので，

$$k^2 \geqq \frac{4}{1 - 0.85} = \frac{80}{3}$$

より，$k \geqq \dfrac{4\sqrt{15}}{3}$ である．

**問 26**　第 $i$ 回目の測定値を $X_i$ とすると，$X_1, \cdots X_{40}$ は独立で，$E[X_i] = 56.3$，$V[X_i] = (8.4)^2$ である．よって，中心極限定理より，これらの算術平均を $Y$ とすると，

$$Z = \frac{\sqrt{40}}{8.4}(Y - 56.3)$$

は $N(0,1)$ に従う．よって，

$$\begin{aligned} P(56 \leqq Y \leqq 57) &= P\left(\frac{\sqrt{40}}{8.4}(56 - 56.3) \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{40}}{8.4}(57 - 56.3)\right) \\ &= P(-0.23 \leqq Z \leqq 0.53) = \Phi(0.23) + \Phi(0.53) \\ &= 0.0910 + 0.2019 = 0.2929 \end{aligned}$$

となる．