解答例

1.1 節の節末問題

1. (1) ${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = 120$ (2) ${}_9\mathrm{P}_5 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120$ (3) $6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2160$
(4) $\dfrac{7!}{3!2!2!} = 210$
(5) 全ての並び順から，11 と 22 が入らないものを数えればよい．11 が入る並びは 2 つの 1 をまとめて 11 として考えると，$6!/2!$ 個ある．22 も同様．さらに，11 と 22 が両方入るのは $5!$ なので，

$$\frac{7!}{2!2!} - 2\times\frac{6!}{2!} + 5! = 660$$

である．

2. (1) $5^3 = 125$ (2) $3^4 = 81$

3. (1) ${}_{30}\mathrm{C}_2 = 435$
(2) 頂点を 2 つ選び，そこから対角線にならないものを引けばよい．${}_8\mathrm{C}_2 - 8 = 20$
(3) まず 4 人選び，残った 8 人からさらに 4 人選ぶ．グループに区別がないので $3!$ で割る必要がある．${}_{12}\mathrm{C}_4 \times {}_8\mathrm{C}_4/3! = 5775$
(4) 1 列に並べた 30 個のボールを 3 つに分けることをイメージする．3 つに分けるためには区切りの線を 2 本引けばよいので，ボールとボールの間の隙間 29 個のうちから，線を引く 2 つを選ぶと考えれば，${}_{29}\mathrm{C}_2 = 406$

4. (1) 二項定理を使えば，${}_8\mathrm{C}_4 = 70$ (2) ${}_5\mathrm{C}_3\times 2^3\times 3^2 = 720$
(3) ${}_6\mathrm{C}_2\times {}_4\mathrm{C}_2\times 2^2 = 360$

5. $A\cup B = \{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B = \{3\}$，$A^c = \{4,5,6\}$，$A\setminus B = \{1,2\}$，$P(A\cup B) = 5/6$，$P(A\cap B) = 1/6$，$P(A^c) = 1/2$，$P(A\setminus B) = 1/3$

6. $A\cap B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(5,1)\}$，
$A\setminus B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\}$，
C^c は「4 以上の目が出ない」なので，$A\cap C^c = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$.

7. 事象 A は両方奇数の確率なので，$P(A) = 1/4$．事象 B は片方が 1，もう片方が素数の確率なので，$P(B) = \dfrac{1\cdot 3}{6^2}\times 2 = 1/6$．事象 $A\cap B$ は，2 以外の素数になればよいので，$P(A\cap B) = \dfrac{1\cdot 2}{6^2}\times 2 = 1/9$．$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 11/36$

8. (P3) において，$n=2$，$A_1 = A$，$A_2 = B$ とすれば，(P3*) が導かれる．
逆を示すのには，数学的帰納法を使う．(P3*) を仮定すれば，(P3) の $n=2$ の場合がまず示される．次に，$n=k$ のときは成り立つと仮定し，$n=k+1$ のときを考える．$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$ と A_{k+1} は互いに独立なので，(P3*) と帰納法の仮定から

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{k+1} A_m\right) = P\left(\bigcup_{m=1}^{k} A_m\right) + P(A_{k+1}) = \sum_{m=1}^{k+1} P(A_m)$$

となり示される．

9. $P(B) = \dfrac{5}{15} \times \dfrac{4}{14} + \dfrac{10}{15} \times \dfrac{5}{14} = 1/3$，$P(B|A) = 5/14$ より独立でない．

10. $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{21}{35} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{15}{25} = 3/5$，$P(B|A) = 21/35 = 3/5$ より独立である．

11. 全ての場合を数え上げると，あいこになるのは 9 通り．よって，$P(A) = 9/27 = 1/3$．一方，少なくとも一人がグーを出すのは $3^3 - 2^3 = 19$ 通り，そのうちあいこになるのは 7 通りなので，$P(A|B) = 7/19$．よって独立でない．

12. カードの各面に数字を振ると，1 番から 6 番までできる．このうち，赤面は 3 つであり，さらにその裏面が白であるのは 1 つだけである．よって，求める確率は 1/3 である．

13. ベイズの定理から，

$$\frac{0.3 \times 0.5}{0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.5 + 0.2 \times 0.4} = \frac{15}{53}.$$

14. ベイズの定理から，B が担当した学生の割合は

$$\frac{0.35 \times 0.2}{0.3 \times 0.4 + 0.35 \times 0.2 + 0.25 \times 0.2 + 0.1 \times 0.6} = \frac{7}{30}.$$

D が担当した学生の割合は

$$\frac{0.1 \times 0.6}{0.3 \times 0.4 + 0.35 \times 0.2 + 0.25 \times 0.2 + 0.1 \times 0.6} = \frac{1}{5}.$$