解答例

1.1 節

問 1　和集合や積集合などを計算すれば，$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$，$A \cap B = \{3\}$，$B^c = \{1, 2, 4, 5\}$，$A \backslash B = \{1, 5\}$ である．確率は高校数学のように計算すれば，$P(A \cup B) = 2/3$，$P(A \cap B) = 1/6$，$P(B^c) = 2/3$，$P(A \backslash B) = 1/3$ である．

問 2　事象 A はまず甲がグーを出すと仮定して，乙，丙の出し方 9 通りを全て考えるとよい．甲が勝つのは，残りの二人が（グー，チョキ）,（チョキ，グー）,（チョキ，チョキ）の 3 通り．甲がチョキまたはパーを出す場合も同様なので，$P(A) = 1/3$ である．同じように考えると，$P(B) = 1/3$ もわかる．次に $A \cap B$ も上と同様に甲がグーを出すと仮定すると，甲が勝ちかつ乙が負けるのは，乙，丙の出し方が（チョキ，グー）,（チョキ，チョキ）の 2 通り．よって $P(A \cap B) = 2/9$ である．$P(B^c)$ は $P(B^c) = 1 - P(B) = 2/3$ である．$P(A \cup B)$ は $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4/9$ である．$P(A \backslash B)$ は甲が勝ちかつ乙が負けないので，甲，乙がともに勝つ確率となる．よって $P(A \backslash B) = 1/9$ である．

問 3　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - r.$
$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - q.$
$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(A \cap B) = 1 - p + r.$
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ より，$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - p - q + r.$

問 4　玉に 1 番から 25 番まで番号がついているとし，赤玉に 1 番から 15 番までの番号がふられているとする．甲が赤玉をとる確率は $P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ である．また，全ての組合せは 25×24 通りであり，その中で乙が白玉をとるのは，(i, j) $(1 \leq i \leq 25, 16 \leq j \leq 25, i \neq j)$ なので，その組み合わせは 24×10 となる．よって，

$$P(B) = \frac{24 \times 10}{25 \times 24} = \frac{2}{5}$$

である．

$P(B|A)$ は，$P(A \cap B) = \frac{15 \times 10}{25 \times 24} = \frac{1}{4}$ より，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{12}$$

である．同様に，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{8}$$

である．なお，$P(B|A)$ の計算では，甲が赤玉をとるので，赤玉が 1 つ少なくなっていると考えられるため，$P(B|A) = 10/24 = 5/12$ とも計算できる．ちなみに，$P(A|B)$ も同様に，$P(A|B) = 15/24 = 5/8$ と計算しても正答が導かれる.（これが成り立つ理由は，組み合わせ $\{(i, j)\}$ が対称であることに依っており，証明はそれほど簡単ではない．さらにつきつめて考えると，くじ引きは引く順番に依らないことが証明できる．ただし，理由を書く必要があるため試験などでは用いない方がよい.）$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ より，A と B は独立ではない．

問 5　すべての取り方は 52×51 通りあり，その中で，A，B，$A \cap B$ に含まれるものを考えると，

$$P(A) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{51 \times 4}{51 \times 52} = \frac{1}{13}, \quad P(A \cap B) = \frac{12 \times 4 + 1 \times 3}{51 \times 52}$$

より，$P(A|B) = (1/52)/(1/13) = 1/4$ となる．また，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ または $P(A|B) = P(A)$ より，A と B は独立である．次に，$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$ より，$P(A|C) = 0$．よって，A と C は独立でない．

問 6　すでにみたように，$P(A) = P(B) = 1/3$ である．$A \cap B$ は甲，乙ともに勝つので，（グー，グー，チョキ），（チョキ，チョキ，パー），（パー，パー，グー）の 3 通りがあり，$P(A \cap B) = 1/9$ となる．よって，$P(A|B) = P(A)P(B)$ となるので A と B は独立である．なお，事象 C を「乙が負ける」とすると，A と C は独立にならない．

問 7　$P(B|A^c) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ より，定理 4 を用いれば，

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

となる．

問 8　例題 4 のように事象 A から D を定めると，ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{0.02 \times 0.4}{0.02 \times 0.3 + 0.03 \times 0.3 + 0.02 \times 0.4} = \frac{8}{23} \end{aligned}$$

となる．

問 9　事象 A を「1 点差になる」，事象 B を「2 点以上差が付く」，事象 C を「試合に勝つ」とすると，ベイズの定理から

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)} = \frac{0.3 \times 0.6}{0.3 \times 0.6 + 0.8 \times 0.2} = \frac{9}{17}$$

となる．