4 章の解答例

演習問題 4

1.　(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(3x^2-\log xy)=3.$

(2)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=0.$

(3)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y}{x^3-y^3}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{3}.$

(4)　$y=mx$ とおくと，$\displaystyle\frac{x-y}{x+y}=\frac{1-m}{1+m}$ なので極限なし.

(5)　$y=mx$ とおくと，$\displaystyle\frac{x}{y}=\frac{1}{m}$ なので極限なし.

(6)　4.3 節の問 7 を $f(x,y)=2-\cos x-\cos y$，$(a,b)=(0,0)$，$(h,k)=(x,y)$ として応用すると，

$$2-\cos x-\cos y=\frac{x^2+y^2}{2}+\varepsilon(x,y)$$

と表すとき，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}=0$ が成り立つ．ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2-\cos x-\cos y}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\frac{x^2+y^2}{2}+\varepsilon(x,y)}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2}{1+2\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}}=2.\end{aligned}$$

2.　(1)　$y=x^2$ とおくと，$f(x,y)=\frac{1}{2}$ なので，原点で不連続.

(2)　極座標表示すると，

$$|f(x,y)|=\left|\frac{r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\right|=\frac{r^2}{2}|\sin 2\theta\cos 2\theta|=\frac{r^2}{4}|\sin 4\theta|\leqq\frac{r^2}{4}$$

なので，原点で連続.

(3)　$(x,y)=(t\cos t,t\sin t)$ 上では，$t\to 0$ のとき，$f(x,y)\to 1$ となるので，原点で不連続.

3.　与えられた関数を $f(x,y)$ とする.

(1)　直接計算から，$f_x=-4xf$, $f_y=-6yf$, $f_{xx}=4(4x^2-1)f$, $f_{yy}=6(6y^2-1)f$ を得る．また，$f_{xy}=24xyf$ は連続なので, シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=24xyf$.

(2)　$u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x}{u}$, $f_y=-\dfrac{y}{u}$, $f_{xx}=-\dfrac{\{y^2+(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}}{u^3}$, $f_{yy}=-\dfrac{\{x^2+(y^2-x^2)(x^2+y^2)\}}{u^3}$ を得る．また, $f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$ は連続なので, シュワルツの定理より, $f_{yx}=f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$.

(3)　$u(x,y)=1+x^3+y^2$ とすると，$f_x=\dfrac{3x^2}{u}$, $f_y=2\dfrac{y}{u}$, $f_{xx}=\dfrac{3x(2+2y^2-x^3)}{u^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2(1+x^3-y^2)}{u^2}$ を得る．また，$f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$.

(4)　$u(x,y)=1+\cos x+\cos y$ とすると，$f_x=\dfrac{\sin x}{u^2}$, $f_y=\dfrac{\sin y}{u^2}$,
$f_{xx}=\dfrac{1+\cos x+\cos x\cos y+\sin^2 x}{u^3}$，$f_{yy}=\dfrac{1+\cos y+\cos x\cos y+\sin^2 y}{u^3}$ を得る．
また, $f_{xy}=2\dfrac{\sin x\sin y}{u^3}$ は連続なので, シュワルツの定理より, $f_{yx}=f_{xy}=2\dfrac{\sin x\sin y}{u^3}$.

(5)　直接計算より, $f_x=\cosh x\cosh y$, $f_y=\sinh x\sinh y$, $f_{xy}=f_{yx}=\cosh x\sinh y$, $f_{xx}=f_{yy}=f$.

(6)　$f_x=\dfrac{1}{x}$，$f_y=\dfrac{1}{y\log y}$，$f_{xx}=-\dfrac{1}{x^2}$，$f_{yy}=-\dfrac{1+\log y}{(y\log y)^2}$，$f_{xy}=f_{yx}=0$.

4.　与えられた関数 z に対して，z_x，z_y を求め，$dz=z_xdx+z_y=dy$ とすればよい．

(1)　$dz=(4xy-3y^2)dx+(2x^2-6xy)dy$　(2)　$dz=\dfrac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$

(3)　$dz=-\dfrac{2xdx+3ydy}{(2x^2+3y^2)^{3/2}}$　(4)　$dz=2\exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$

5.　$f(x,y)=\exp\left(-\dfrac{x^2}{4at}\right)$ とおくと，$u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}f$ かつ $f_t=\dfrac{x^2}{4at^2}f$ なので,

$$u_t=\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}+\frac{x^2}{4at^{5/2}}\right)f.$$

また，$f_x=-\dfrac{x}{2at}f$ なので,

$$u_{xx}=\frac{1}{\sqrt{t}}f_{xx}=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2at}+\frac{x^2}{4a^2t^2}\right)f.$$

$$\therefore au_xx=\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}+\frac{x^2}{4at^{5/2}}\right)f=u_t.$$

6.　(1)　$f(x,y)=\cos x\sin y$ とすると，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=1$，$f_{xx}=-\cos x\sin y$，$f_{xy}=-\sin x\cos y$，$f_{yy}=-\cos x\sin y$ なので,

$$f(x,y)=y-\frac{1}{2}(\cos\theta x)(\sin\theta y)(x^2+y^2)-xy(\sin\theta x)(\cos\theta y)$$

(2)　$f(x,y)=\cosh x\sinh y$ とすると，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=1$，$f_{xx}=\cosh x\sinh y$，$f_{xy}=\sinh x\cosh y$，$f_{yy}=\cosh x\sinh y$ なので,

$$f(x,y)=y+\frac{1}{2}(\cosh\theta x)(\sinh\theta y)(x^2+y^2)+xy(\sinh\theta x)(\cosh\theta y).$$

(3)　$f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$ とすると，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$，$f_{xx}=\dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$，$f_{xy}=-\dfrac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$，$f_{yy}=\dfrac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$ なので,

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\frac{1-\theta^2(x^2+y^2)}{\{1+\theta^2(x^2+y^2)\}^2}.$$

(4)　$f(x,y)=e^{x+y}$ とすると，$f_x=f_y=f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=f$ なので,

$$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2e^{\theta(x+y)}$$

7.　$x_r=\cos\theta$，$y_r=\sin\theta$ より，$f_r=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y$．$x_\theta=-r\sin\theta$，$y_\theta=r\cos\theta$ より，$\frac{f_\theta}{r}=-\sin\theta f_x+\cos\theta f_y$．よって,

$$\begin{array}{rcl} (f_r)^2 & = & \cos^2\theta(f_x)^2 + 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \sin^2\theta(f_y)^2 \\ + \quad \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & \sin^2\theta(f_x)^2 - 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \cos^2\theta(f_y)^2 \\ \hline (f_r)^2 + \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & (f_x)^2 + (f_y)^2 \end{array}$$

8. (1) 陰関数 y の定義域を求める．与式を変形して $y^2 + (3x-2)y + x^2 = 0$．よって，$D = (3x-2)^2 - 4x^2 \geqq 0$ より，定義域は $x \leqq \frac{2}{5}$ または $x \geqq 2$．与式の両辺を x について微分すると，

$$2x + 3y + (3x + 2y - 2)y' = 0. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y - 2}.$$

$y' = 0$ より $2x + 3y = 0$ なので，$y = -2x/3$．これを与式に代入して x を求めると，$x = 0, \frac{12}{5}$．よって極値の候補は $(x, y) = (0, 0), \left(\frac{12}{5}, -\frac{8}{5}\right)$．次に，$(*)$ を x について微分して整理すると，

$$y'' = \frac{10(x^2 + 3xy + y^2 - 2y) - 8}{(3x + 2y - 2)^3} = -\frac{8}{(3x + 2y - 2)^3}.$$

$y''(0) = 1\,(> 0)$ なので $x = 0$ で極小．$y''\left(\frac{12}{5}\right) = -1\,(< 0)$ なので $x = \frac{12}{5}$ で極大．以上より，極小値は 0 ($x = 0$ のとき)，極大値は $-\frac{8}{5}$ ($x = \frac{12}{5}$ のとき).

(2) 与式の両辺を x について微分すると，

$$3x^2 + 4x = 2yy'. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = \frac{3x^2 + 4x}{2y}.$$

よって，$y' = 0$ のとき，$x = 0, -4/3$．また，$(*)$ を x について微分して，$y' = 0$ すると，

$$y'' = \frac{6x + 4}{2y}.$$

$x = 0$ のときは，与式から $y = 0$ となり，点 $(x, y) = (0, 0)$ 付近では陰関数がただ一つに定まらない．一方，$x = -4/3$ のときは，$y = \pm 4\sqrt{6}/9$ かつ $y''(\pm 4\sqrt{6}/9) = \mp 3\sqrt{6}/2$．よって，$4\sqrt{6}/9$ は極大値で，$-4\sqrt{6}/9$ は極小値.

(3) 与式の両辺を x について微分すると，

$$x^2 - 2y + (-2x + y^2)y' = 0. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}.$$

よって，$y' = 0$ のとき，$x = 0, 2\sqrt[3]{2}$．また，$(*)$ を x について微分して $y' = 0$ すると，

$$y'' = \frac{2x}{2x - y^2}.$$

$x = 0$ のときは，与式から $y = 0$ となり，点 $(x, y) = (0, 0)$ 付近では陰関数がただ一つに定まらない．一方，$x = 2\sqrt[3]{2}$ のときは，$y = 2\sqrt[3]{4}$ かつ $y''(2\sqrt[3]{2}) = -1 < 0$．よって，

$2\sqrt[3]{4}$ は極大値.

(4) 与式の両辺を x について微分すると,

$$2x + 4y^3 y' = 0. \tag{$*$}$$

y' について解くと,

$$y' = \frac{-x}{2y^3}.$$

よって,$y' = 0$ のとき,$x = 0$.($*$) を x について微分すると,

$$y'' = -\frac{1}{2y^3}.$$

よって,$x = 0$ のときは,与式から $y = \pm\sqrt[4]{2}$ かつ $y''(\pm\sqrt[4]{2}) = \mp 1/(2\sqrt[4]{8})$.よって,$\sqrt[4]{2}$ は極大値,$-\sqrt[4]{2}$ は極小値.

9. (1) $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ とすると,$f_x = f_y = 0 \iff (x,y) = (0,\pm 1)$.$(x,y) = (0,-1)$ のときは,$D > 0$ なので極値をもたない.$(x,y) = (0,1)$ のときは,$D < 0$ かつ $A > 0$ より極小値 $f(0,1) = -2$ をもつ.

(2) $f(x,y) = \cosh(x^2+y^2)$ とすると,$f_x = f_y = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.この場合,$D = 0$ となるので,定理 11 は適用できない.しかし,$r = x^2 + y^2$ とおくと,$r \geqq 0$ かつ $r = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.また,$r > 0$ のとき,$\cosh r > \cosh 0 = 1$.ゆえに,$(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y) > f(0,0) = 1$.すなわち,f は原点において極小値 1 をもつ.

(3) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{x^2+y^2}$ とすると,$f_x = f_y = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.この場合,$D > 0$ なので極値をもたない.

(4) $f(x,y) = xy(1-x-y)$ とすると,

$$f_x = f_y = 0 \iff (x,y) = (0,0), (1,0), (0,1), (1/3,1/3).$$

$(x,y) = (0,0), (1,0), (0,1)$ のときは,$D > 0$ なので極値をもたない.

$(x,y) = (1/3,1/3)$ のときは,$D < 0$ かつ $A < 0$ より $f(1/3,1/3) = 1/27$ は極大値.

10. D の内部 $x^2 + y^2 < 1$ の極大値・極小値と D の境界 $x^2 + y^2 = 1$ における最大値・最小値の中から,D における最大値・最小値を選べばよい. (1) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ とすると,D の内部で $f_x = f_y = 0$ となる点は,$(x,y) = (1/2,0)$.このとき,$D < 0$,$A > 0$ なので,$f(1/2,0) = -1/4$ は極小値.

境界における最大値・最小値を求めるために,$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ として,条件 $F(x,y) = 0$ の下で,$f(x,y)$ の極値を考える.(a,b) で極値をもつとすれば,$a^2 + b^2 = 1$ より,$F_x(a,b) = 2a$,$F_y(a,b) = 2b$ の少なくとも一方は 0 でない.よって,ラグランジュの未定乗数法より,

$$\begin{cases} 2a(1-\lambda) = 1 \\ 2b(2-\lambda) = 0 \end{cases}$$

$b = 0$ のとき,$a = \pm 1$ なので,$f(a,b) = 1 \mp 1 = 0, 2$.

$b \neq 0$ のとき,$\lambda = 2$,$a = -1/2$ なので,$b = \pm\sqrt{3}/2$.よって,$f(a,b) = 9/4$.

以上から，最大値 $9/4$，最小値 $-1/4$.

(2)　$f(x,y)=(1-x^2-y^2)xy^2$ とすると，D の内部で $f_x=f_y=0$ となる点は，$(x,y)=(0,\pm1)$，$(1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$，$(-1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ と $y=0$ となるすべての点 $(x,0)\in D$ である．まず，$f(x,0)=0$ なので，点 $(x,0)\in D$ では極値をとらない．また，$(x,y)=(0,\pm1)$ の場合も，$D>0$ となり，極値をとらない．次に，点 $(\pm1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ では，$D<0$ となり，$x=1/\sqrt{5}$ ならば $A<0$ で，$x=-1/\sqrt{5}$ ならば $A>0$．ゆえに，$f(1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})=4\sqrt{5}/125$ は極大値で，$f(-1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})=-4\sqrt{5}/125$ は極小値．一方，境界上では，$x^2+y^2=1$ を常に満たすので，$f(x,y)=(1-x^2-y^2)xy^2=0$. よって，最大値 $4\sqrt{5}/125$，最小値 $-4\sqrt{5}/125$.

(3)　$f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ とすると，D の内部で $f_x=f_y=0$ となる点は，$(x,y)=(0,0),(1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2})$．よって，$f(0,0)=0$，$f(1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2})=\pm1/(\sqrt{2}e)$, $f(-1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2})=\mp1/(\sqrt{2}e)$ は極値の候補となる．

境界上の点は，$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ と表せるので，$f(\cos\theta,\sin\theta)=\sin(2\theta)/(2e)$. よって，境界では最大値 $1/(2e)$，最小値 $-1/(2e)$ をとる．

以上から，最大値 $1/(\sqrt{2}e)$，最小値 $-1/(\sqrt{2}e)$.

11. 体積を定数 $c>0$ とおいて，辺の長さを横 x，縦 y，高さ z とすると，$c=xyz$ となる．このとき，表面積は $2xy+2yz+2xz$ なので，z を消去して，

$$f(x,y)=2xy+2\frac{c}{x}+2\frac{c}{y}$$

を, $x>0, y>0$ の範囲で最小化する x，y，z の条件を求めればよい．

まず，$\lim_{x\to0}f(x,y)=+\infty$，$\lim_{y\to0}f(x,y)=+\infty$，$\lim_{r\to\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=+\infty$ $(0<\theta<\pi/2)$ なので，$f(x,y)$ は $x>0$, $y>0$ で $f(x,y)$ は最小値をもつ．

次に，$f_x=f_y=0$ となるのは，

$$yx^2=xy^2=c.$$

よって，$xy(x-y)=0$ となるので，$x=y$．これを，上の式に代入すると，$x^3=y^3=c$. ゆえに，$(x,y)=(\sqrt[3]{c},\sqrt[3]{c})$．この場合，$D<0$ かつ $A>0$ なので，$f(\sqrt[3]{c},\sqrt[3]{c})=6\sqrt[3]{c^2}$ は最小値となる．また，$z=c/(xy)$ なので，立方体 $(x=y=z=\sqrt[3]{c})$ のときが，表面積が最小になる．

12. (1)　$ab=2$ のとき，$F_x(a,b)=b$，$F_y(a,b)=a$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a=\lambda b \\ 12b^3=\lambda a \end{cases}$$

$b=0$ とすると，$a=0$ となるので，$ab=2$ に反する．

$b\neq0$ とすると, $(a,b)=\left(\pm2(3/2)^{1/6},\pm(2/3)^{1/6}\right)$ であり, $f(a,b)=4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

一方，$F(x,y)=0$ の下では，$f(x,y)=x^2+6/x^4$ は最小値をもつが最大値をもたない．よって，$4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ は最小値となる．

(2)　$a+b=3$ のとき，$F_x(a,b)=1$，$F_y(a,b)=1$ は 0 でない．よって，ラグラン

ジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a = \lambda \\ 4b = \lambda \end{cases} \qquad \therefore a = 2b.$$

$a + b = 3$ なので，$(a, b) = (2, 1)$ かつ $f(a, b) = 6$.

一方，$F(x, y) = 0$ の下では，$f(x, y) = x^2 + 2(3 - x)^2$ は最小値をもつが最大値をもたない．よって，6 は最小値となる．

(3)　$F(x, y) = x^2y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^4 + y^2$ が極値をとる点 (a, b) の候補を求める．$F(a, b) = 0$ より

$$a^2b^2 = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

なので，$F_x(a, b) = 2ab^2 \neq 0$ である．Lagrange の未定係数法より，

$$f_x(a, b) - \lambda F_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) - \lambda F_y(a, b) = 0$$

を満たす定数 λ が存在する．これより，

$$4a^3 - 2\lambda ab^2 = 0, \quad 2b - 2\lambda a^2 b = 0.$$

$ab \neq 0$ より，

$$2a^2 - \lambda b^2 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$1 - \lambda a^2 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

③より $a^2 = \dfrac{1}{\lambda}$．これを②に代入すると $b^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$．これらを①に代入すると $\dfrac{2}{\lambda^3} = 1$. よって，$\lambda = \sqrt[3]{2}$．このとき，

$$a^2 = \frac{1}{\lambda} = 2^{-\frac{1}{3}} \qquad \therefore \quad a = \pm 2^{-\frac{1}{6}}$$

$$b^2 = \frac{2}{\lambda^2} = 2^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore \quad b = \pm 2^{\frac{1}{6}}$$

よって，

$$(a, b) = (\pm 2^{-\frac{1}{6}}, \pm 2^{\frac{1}{6}}), \quad f(a, b) = a^4 + b^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{3}{\lambda^2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

条件 $F(x, y) = 0$ のもとでは $f(x, y) = x^4 + \dfrac{1}{x^2}$ は最小値をもつが最大値はもとない．よって，$(x, y) = \left(\dfrac{\pm 1}{\sqrt[6]{2}}, \pm\sqrt[6]{2}\right)$ で最小となり，最小値は $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ である．