

4章の解答例

4.4 偏微分的应用

問1 (1) 陰関数の微分法より, $2x - 2 + 4yy' = 0$. これを整理して, $y' = \frac{1-x}{2y}$.

(2) 陰関数の微分法より, $2x + 2y + 2xy' - 4yy' = 0$.

これを整理して, $y' = -\frac{x+y}{x-2y}$

(3) 陰関数の微分法より, $3x^2 + 3y + 3xy' - 3y^2y' = 0$.

これを整理して, $y' = -\frac{x^2+y}{x+y^2}$

(4) 陰関数の微分法より, $\cosh(x+y) + \cosh(x+y)y' = 0$.

これを整理して, $y' = -1$

問2 (1) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ とすると, $f_x = 4x$, $f_y = 8y$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$. $A = f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$, $B = f_{xy}(0, 0) = 0$, $C = f_{yy}(0, 0) = 8$, $D = -32 < 0$ より, 原点で極小値0をもつ.

(2) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$ とすると, $f_x = 2x$, $f_y = -6y$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$. $A = f_{xx}(0, 0) = 2$, $B = f_{xy}(0, 0) = 0$, $C = f_{yy}(0, 0) = -6$, $D = 12 > 0$ より, 極値は存在しない.

(3) $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ とすると, $f_x = 3x^2 + 3y$, $f_y = 3x + 3y^2$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0), (-1, 1)$. 原点では, $A = f_{xx}(0, 0) = 0$, $B = f_{xy}(0, 0) = 3$, $C = f_{yy}(0, 0) = 0$, $D = 9 > 0$. また, 点 $(-1, 1)$ では, $A = f_{xx}(-1, 1) = 6$, $B = f_{xy}(-1, 1) = 0$, $C = f_{yy}(-1, 1) = -6$, $D = 45 > 0$. 以上より, 極値は存在しない.

(4) $f(x, y) = x + y + \frac{4}{x} + \frac{1}{y}$ とすると, $f_x = 1 - \frac{4}{x^2}$, $f_y = 1 - \frac{1}{y^2}$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$. 点 $(2, 1)$ では, $D < 0$, $A > 0$ なので, $f(2, 1) = 6$ は極小値. 点 $(\pm 2, \mp 1)$ では, $D > 0$ より, 極値をとらない. 点 $(-2, -1)$ では, $D < 0$, $A < 0$ より, $f(-2, -1) = -6$ は極大値.

(5) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^4$ とすると, $f_x = 4x + 2y$, $f_y = 2x + 4y^3$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0), \left(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}\right)$. 原点では, $D > 0$ より, 極値をとらない. 点 $(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2})$ では, $D < 0$, $A > 0$ より, $f(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16}$ は極小値.

(6) $f(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^3 - y$ とすると, $f_x = 4x^3 + 4x$, $f_y = 3y^2 - 1$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 点 $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では, $D > 0$ より, 極値をとらない. 点 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では, $D < 0$, $A > 0$ より, $f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極小値.

(7) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ とすると, $f_x = -2xf$, $f_y = -2yf$ なので, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$. 原点では, $D < 0$, $A < 0$ より, $f(0, 0) = 1$ は極大値.

(8) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ とすると, $f_x = f_y = 0 \iff (x, y) = (0, 0), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 原点では, $D > 0$ より, 極値をとらない. 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では, $D < 0$, $A < 0$ より, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2e}$ は極大値. 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では, $D < 0$, $A > 0$ より,

り、 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ は極小値。

問 3 (1) $ab = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = b \neq 0$ 。よって、ラグランジュの未定乗数法により、

$$\begin{cases} 4a - \lambda b = 0 \\ 4b - \lambda a = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) より、 $a(16 - \lambda^2) = 0$ 。 $a \neq 0$ なので、 $\lambda = \pm 4$ 。まず、 $\lambda = -4$ のとき、(*) より、 $a = -b$ 。ところが、 $ab = 1$ なので、 $b^2 = -1$ で不適。次に、 $\lambda = 4$ のとき、(*) より、 $a = b$ 。また、 $ab = 1$ より、 $(a, b) = (\pm 1, \pm 1)$ 。この場合、 $f(a, b) = 4$ は極値の候補となる。条件 $xy = 1$ の下では、 $f(x, y) = f(x, 1/x) = 2(x^2 + 1/x^2) \geq 4$ だから、4 が最小値。

(2) $a + b = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 1 \neq 0$ 。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} 2a - \lambda = 0 \\ 4b - \lambda = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) より、 $a = 2b$ 。 $a + b = 1$ より、 $b = 1/3, \lambda = 4/3$ 。よって、 $a = 2/3$ なので、 $f(a, b) = 2/3$ が極値の候補となる。条件 $x + y = 1$ の下では、 $f(x, y) = f(x, 1-x) \geq 2/3$ だから、 $2/3$ が最小値。

(3) $a^4 b^2 = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 4a^3 b^2 \neq 0$ 。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} 2a - 4\lambda a^3 b^2 = 0 \\ 2b - 2\lambda a^4 b = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) より、 $\lambda = 1/(2a^2 b^2)$ かつ $\lambda = 1/a^4$ なので、 $a^2 = 2b^2$ 。 $a^4 b^2 = 1$ より、 $(a, b) = (\pm\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[3]{2}), (\pm\sqrt[6]{2}, \mp 1/\sqrt[3]{2})$ 。よって、 $f(a, b) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ が極値の候補となる。条件 $x^4 y^2 = 1$ の下では、 $f(x, y)$ は連続かつ $f(x, y) = x^2 + 1/x^4 > 0$ で、右辺は $x \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow \pm 0$ のとき $+\infty$ 発散するので、 $(0, \infty)$ と $(-\infty, 0)$ に最小値をもつ。よって、 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ が最小値。

(4) $2a + b = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 2 \neq 0$ 。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} 4a^3 - 2\lambda = 0 \\ 4b^3 - \lambda = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) より、 $\lambda = 2a^3$ かつ $\lambda = 4b^3$ なので、 $a = \sqrt[3]{2}b$ 。 $2a + b = 1$ より、 $a = \frac{\sqrt[3]{2}}{1 + 2\sqrt[3]{2}}, b = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$ 。よって、 $f(a, b) = \frac{1}{(1 + 2\sqrt[3]{2})^3}$ が極値の候補となる。条件 $2x + y = 1$ の下では、 $f(x, y) = 17x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$ は 4 次関数で、右辺は $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $+\infty$ に発散するので最小値をもつ。よって、 $\frac{1}{(1 + 2\sqrt[3]{2})^3}$ が最小値。

問 4 (1) $4a^2 + b^2 = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 8a, F_y(a, b) = 2b$ の少なくとも一方は

0でない。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} b - 8a\lambda = 0 \\ a - 2b\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b(16\lambda^2 - 1) = 0 \\ 2b\lambda = a \end{cases} \quad (*)$$

$b = 0$ とすると、(*) より $a = 0$ 。ところが、 $1 = 4a^2 + b^2 = 0$ となるので不適。よって、 $b \neq 0$ としてよい。この場合、(*) より、 $\lambda = \pm 1/4$ 。

$\lambda = 1/4$ のとき、(*) より、 $b = 2a$ 。 $4a^2 + b^2 = 1$ より、 $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 。よって、 $f(a, b) = 1/4$ 。

$\lambda = -1/4$ のとき、(*) より、 $b = -2a$ 。 $4a^2 + b^2 = 1$ より、 $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 。よって、 $f(a, b) = -1/4$ 。

$F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は楕円なので、極値で最大値・最小値をとる。よって、 $1/4$ は最大値、 $-1/4$ は最小値。

(2) $a^2 + b^2 = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 2a$ 、 $F_y(a, b) = 2b$ の少なくとも一方は 0 でない。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} 1 - 2a\lambda = 0 \\ 1 - 2b\lambda = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) の第 1 式と第 2 式の差をとると、

$$\lambda(a - b) = 0.$$

$\lambda = 0$ とすると、(*) より $0 = 1 - 2a\lambda = 1$ となるので不適。よって、 $\lambda \neq 0$ としてよい。この場合、 $a = b$ 。 $a^2 + b^2 = 1$ より、 $2a^2 = 1$ なので、 $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 。よって、 $f(a, b) = \pm\sqrt{2}$ 。

$F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は楕円なので、極値で最大値・最小値をとる。よって、 $\sqrt{2}$ は最大値、 $-\sqrt{2}$ は最小値。

(3) $a^2 + ab + b^2 = 1$ のとき、 $F_x(a, b) = 2a + b$ 、 $F_y(a, b) = a + 2b$ がともに 0 になるのは、 $(a, b) = (0, 0)$ のときである。この場合は、 $1 = a^2 + ab + b^2 = 0$ となって不適。よって、 $F_x(a, b) = 2a + b \neq 0$ または $F_y(a, b) = a + 2b \neq 0$ としてよい。よって、ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{cases} b - \lambda(2a + b) = 0 \\ a - \lambda(a + 2b) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) の第 1 式と第 2 式の差をとると、

$$b(1 - 2\lambda - 3\lambda^2) = 0.$$

$b = 0$ とすると、 $a^2 + ab + b^2 = 1$ より、 $a = \pm 1$ 。(*) の第 1 式より、 $0 = b - \lambda(2a + b) = \mp 2\lambda$ 。∴ $\lambda = 0$ 。ところが、第 2 式より、 $0 = a - \lambda(a + 2b) = a = \pm 1$ となるので、不適。よって、 $b \neq 0$ かつ $1 - 2\lambda - 3\lambda^2 = 0$ 。∴ $\lambda = -1, 1/3$ 。

$\lambda = -1$ のとき、(*) より、 $b = -a$ 。 $a^2 + ab + b^2 = 1$ より、 $(a, b) = (\pm 1, \mp 1)$ 。よって、 $f(a, b) = -1$ 。

$\lambda = 1/3$ のとき, (*) より, $a = b$. $a^2 + ab + b^2 = 1$ より, $(a, b) = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$.
よって, $f(a, b) = 1/3$.

$F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は楕円なので, 極値で最大値・最小値をとる. よって, $\sqrt{2}$ は最大値, $-\sqrt{2}$ は最小値. 以上より, 最大値 $1/3$, 最小値 -1 .

(4) $a^3 - 3ab + b^3 = 0$ のとき, $F_x(a, b) = 3a^2 - 3b$, $F_y(a, b) = -3a + 3b^2$ がともに 0 になるのは, $(a, b) = (0, 0), (1, 1)$ のときである. $(a, b) = (1, 1)$ の場合は, $1 = a^3 - 3ab + b^3 = 0$ となって不適. また, $(a, b) = (0, 0)$ の場合は, $f(a, b) = 0$.

$a^3 - 3ab + b^3 = 0$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$ の場合, $F_x(a, b) \neq 0$ または $F_y(a, b) \neq 0$ としてよい. よって, ラグランジュの未定乗数法より,

$$\begin{cases} 1 - \lambda(3a^2 - 3b) = 0 \\ 1 - \lambda(3b^2 - 3a) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) の第 1 式を a 倍したものと, 第 2 式を b 倍したものの差をとると,

$$(a - b)\{3\lambda(a^2 + ab + b^2) - 1\} = 0.$$

$3\lambda(a^2 + ab + b^2) - 1 = 0$ のとき, (*) より,

$$1 = 3\lambda a^2 + 3\lambda ab + 3\lambda b^2 = (3\lambda b + 1) + 3\lambda ab + (3\lambda a + 1).$$

これを整理して, $3\lambda(a + ab + b) = -1$. $a, b \geq 0$ なので, $\lambda < 0$ ところが, $3\lambda(a^2 + ab + b^2) = 1$ は, $\lambda > 0$ を意味するので矛盾.

$3\lambda(a^2 + ab + b^2) - 1 \neq 0$ なので, $a = b$. このとき, $a^3 - 3ab + b^3 = 0$ より, $(a, b) = (3/2, 3/2)$. よって, $f(a, b) = 3$.

$F(x, y) = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$) を満たす点 (x, y) 全体の集合は閉曲線なので, 極値で最大値・最小値をとる. よって, 3 は最大値, 0 は最小値.