

4章の解答例

4.3 高次偏導関数

問1 (1) $f(x, y) = (2x + y)^2$ とすると, $f_x = 4(2x + y)$, $f_y = 2(2x + y)$, $f_{xx} = 8$, $f_{xy} = f_{yx} = 4$, $f_{yy} = 2$.

(2) $f(x, y) = \cosh(x + y)$ とすると, $f_x = f_y = \sinh(x + y)$. これを微分して, $f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = \cosh(x + y)$.

(3) $f(x, y) = e^x \log y^2$ とすると, $f_x = f$ なので, $f_{xx} = f_x = f$, $f_{xy} = f_y$. また, $f_y = \frac{2e^x}{y}$ なので, $f_{yx} = f_y = \frac{2e^x}{y}$, $f_{yy} = -\frac{2e^x}{y^2}$.

(4) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ とすると, $f_x = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$. これらを微分して, $f_{xx} = \frac{2(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^3}$, $f_{yy} = \frac{2(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$.

(5) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ とすると, $f_x = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $f_y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. これらを微分して, $f_{xx} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $f_{yy} = -\frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$.

(6) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$ とすると, $f_x = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$, $f_y = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2}$. これらを微分して, $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{2y(3x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^3}$, $f_{xx} = f_{yy} = \frac{2x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 - y^2)^3}$.

問2 (1) 原点では,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

原点以外では, $f(x, y) = \frac{xy(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2}$ なので, $f(x, y)$ は偏微分可能で,

$$f_x = \frac{y(x^4 + 2^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x(x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

よって, f_x, f_y は原点以外では連続である. 極座標表示すると, $|f_x| \leq 4r$, $|f_y| \leq 8r$ となり, 右辺は θ に依らない関数で, $r \rightarrow 0$ のとき, 0 に収束する. よって, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) = 0 = f_x(0, 0)$, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_y(x, y) = 0 = f_y(0, 0)$. 以上から, f はすべての点で偏微分可能で, f_x, f_y はすべての点で連続であるのである. したがって, f は C^1 級である.

(2) 原点以外では, f_x は偏微分可能で, f_{xy} は直線 $x = 0$ 上で $f_{xy}(0, y) = 10$, 直線 $y = 0$ 上で $f_{xy}(x, 0) = 1$ である. よって, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x, y)$ が存在しない. したがって, f_{xy} は原点で連続でない.

問3 (1) $f(x, y) = x^2 + y^3$ とすると, $f_{xy} = 0$ は定数関数なので, 連続.

(2) $f(x, y) = y^2 e^{x^2}$ とすると, $f_{xy} = 4xye^{x^2}$ なので, 連続.

(3) $f(x, y) = \sin^{-1} xy$ とすると, $f_{xy} = \frac{1}{\{1 - (xy)^2\}^{3/2}}$. よって, $|xy| < 1$ となる点 (x, y) で連続.

(4) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ とすると, $f_{xy} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$ なので, 原点を除いて連続.

(5) 原点以外では, $f(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ なので, $f_{xy} = \frac{xy(1 - 3\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^3} f$

は連続で, 極座標表示すると $|f_{xy}| \leq (r^{-4} + 3r^{-3})e^{-1/r}$ となり, 右辺は θ によらない関数で, $r \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する. よって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x, y) = 0$. 一

方, 原点では, $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} e^{-1/|h|} = 0$, $f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 0$ なので, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x, y) = f_{xy}(0, 0)$. よって, f_{xy} は連続.

問 4 $F(x, t) = f(x \pm at)$ とおくと, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 f''(x \pm at)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x \pm at)$. よって,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 (f''(x + at) + f''(x - at)) = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

問 5 (1) $f(x, y) = 2x - y + 1$ とすると, $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = 0$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$ とすると, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(3) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ とすると, $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = -6x$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(4) $f(x, y) = e^x \cos y$ とすると, $f_{xx} = f$, $f_{yy} = -f$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(5) $f(x, y) = \cosh x \sin y$ とすると, $f_{xx} = f$, $f_{yy} = -f$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(6) $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ とすると, $f_{xx} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -f_{yy} =$ なので, $f_{xx} + f_{yy} =$

0.

(7) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると, $f_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -f_{yy}$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(8) $f(x, y) = \sin^{-1} u(x, y)$, $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ とすると, $f_x = \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2}}$, $f_{xx} = \frac{u_{xx}(1 - u^2) + uu_x^2}{(1 - u^2)^{3/2}}$. ここで, $u_{xx}(1 - u^2) + uu_x^2 = \frac{4xy(x^2 - y^2)^3}{(x^2 + y^2)^5}$ を $g(x, y)$ とおくと, $g(y, x) = -g(x, y)$ となる. よって, $f(y, x) = f(x, y)$, $u(y, x) = u(x, y)$ より, $f_y y(x, y) = f_{xx}(y, x) = -f_{xx}(x, y)$. したがって, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(9) $f(x, y) = \tan^{-1} u(x, y)$, $u(x, y) = \frac{y}{x}$ とすると, $f_x = \frac{u_x}{1 + u^2}$, $f_y = \frac{u_y}{1 + u^2}$. また, $u_x = -y/x^2$, $u_{xx} = 2y/x^3$ より, $f_{xx} = \frac{2y}{x^3(1 + u^2)^2}$. $u_y = 1/x$, $u_{yy} = 0$ より, $f_{yy} = \frac{-2y}{x^3(1 + u^2)^2} = -f_{xx}$ なので, $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

問 6 (1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とすると, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(x, y) =$

$\frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, f_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, f_{xy}(x, y) = \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$ なるので,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= 1 - \frac{x^2 + y^2}{2\{1 - \theta^2(x^2 + y^2)\}^{3/2}}. \end{aligned}$$

(2) $f(x, y) = \sin(x + y)$ とすると, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1, f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = -\sin(x + y)$ なるので,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= (x + y) - \frac{1}{2}(x + y)^2 \sin(\theta(x + y)). \end{aligned}$$

(3) $f(x, y) = \cosh(x + y)$ とすると, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = \cosh(x + y)$ なるので, $f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x + y)^2 \cosh(\theta(x + y))$.

(4) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$ とすると, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, f_{xx}(x, y) = \frac{2(y^2 - x^2 - 1)}{(1 - x^2 - y^2)^2}, f_{xy}(x, y) = \frac{-4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, f_{yy}(x, y) = \frac{2(x^2 - y^2 - 1)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ なるので,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= -\frac{(x^2 + y^2)\{1 + \theta^2(x^2 + y^2)\}}{\{1 - \theta^2(x^2 + y^2)\}^2}. \end{aligned}$$

(5) 原点以外では, $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ となるので, 合成関数の微分法を用いて計算する. このとき, $f(y, x) = f(x, y)$ より $f_{yy}(x, y) = f_{xx}(y, x)$ となることも利用するとよい. 一方, 原点では $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$. 同様に, $f_y(0, 0) = 0$ となる. 以上から,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= \frac{2 - 3\theta^2(x^2 + y^2)}{\theta^6(x^2 + y^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2(x^2 + y^2)}\right). \end{aligned}$$

問 7 テイラーの定理より,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k)\} \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon(h, k)}{h^2 + k^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{h^2 + k^2} (f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{xx}(a, b)) \right. \\ &\quad + \frac{2hk}{h^2 + k^2} (f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{xy}(a, b)) \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{h^2 + k^2} (f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{yy}(a, b)) \right\}.\end{aligned}$$

ここで, $\left| \frac{h^2}{h^2 + k^2} \right|$, $\left| \frac{2hk}{h^2 + k^2} \right|$, $\left| \frac{k^2}{h^2 + k^2} \right|$ はすべて 1 以下なので,

$$\begin{aligned}\left| \frac{\varepsilon(h, k)}{h^2 + k^2} \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ |f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{xx}(a, b)| \right. \\ &\quad + |f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{xy}(a, b)| \\ &\quad \left. + |f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k) - f_{yy}(a, b)| \right\}.\end{aligned}$$

仮定より, f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} は連続なので, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k) = f_{xx}(a, b)$,
 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k) = f_{xy}(a, b)$, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k) = f_{yy}(a, b)$

だから, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{h^2 + k^2} = 0$ が言える.