6　級数

6.1　級数
6.2　べき級数
演習問題 6

6.1　級数

問 1

(1)　例 1 より，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する．もし $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ が収束すると，定理 1 より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないといけないので，矛盾である．よって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ は発散する．

(2)　$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ と，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することから，定理 4 を使えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ は収束することがわかる．

(3)　$\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n}$ と，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することから，定理 4 を使えば，この級数は発散する．

(4)　$\log n \leq n^{1/2}$ より $\frac{\log n}{n^2} \leq n^{-3/2}$ である．ここで，$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ が収束するので，定理 4 より，この級数は収束する．

(5)　$\log(n+1) \leq n$ より，$\frac{1}{\log(n+1)} \geq \frac{1}{n}$ である．ここで，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散するので，定理 4 より，この級数は発散する．

(6)　$f(x) = x^2 e^{-x^3}$ とおくと，$f'(x) = 2xe^{-x^3} - 3x^4 e^{-x^3} = xe^{-x^3}(2-3x^3)$ より，$[1,\infty)$ で $f'(x) < 0$ となる．よって，$f(x)$ は $[1,\infty)$ 上の連続な単調減少関数で，$f(n) = n^2 e^{-n^3}$ を満たす．さらに，

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-x^3} \right]_1^R = \frac{1}{3} e^{-1}$$

なので，定理 3 より，この級数は収束する．

(7)　$n \geq 4$ のとき，$n! \geq n^2$ なので，$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$ である．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので，定理 4 より，この級数は収束する．

(8)　$n \leq 2^n$，$2n \leq 2^n$ より，$\frac{n}{2^{2^n}} \leq \frac{1}{2^{2^n - n}} \leq \frac{1}{2^n}$ となる．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は収束するので，定理 4 より，この級数は収束する．

(9)　$f(x) = xe^{-2x}$ とおくと，$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$ より，$[1,\infty)$ で $f'(x) < 0$ となる．よって，$f(x)$ は $[1,\infty)$ 上の連続な単調減少関数で，$f(n) = ne^{-2n}$ を満たす．さらに，

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_1^R = \frac{3}{4} e^{-2}$$

なので，定理 3 より，この級数は収束する．

問 2

(1)　$\frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = 1/(n+1) \to 0$ より，ダランベールの判定法を使えば，この級数は収束する．

(2)　$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{2^n} = \frac{n+1}{2} \to \infty$ より，この級数は発散する．

(3)　$\frac{(n+1)}{3^{n+1}} \Big/ \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3}$ より，この級数は収束する．

(4)　$\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$ より，コーシーの判定法を使えば，この級数は収束する．

(5)　$\sin \frac{1}{n} \to 0$ より，この級数は収束する．

(6)　$\left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \to e^{-1}$ より，この級数は収束する．

(7)　$\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$ より，この級数は収束する．

(8)　$\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^p} \Big/ \dfrac{n!}{n^p} = \dfrac{(n+1)n^p}{(n+1)^p} \to \infty$ より，この級数は発散する．

(9)　$\dfrac{(n+1)^p e^{-(n+1)}}{n^p e^{-n}} = \dfrac{(n+1)^p}{en^p} \to \dfrac{1}{e}$ より，この級数は収束する．

問 3

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ なので，ライプニッツの定理より，この級数は収束する．

(2)　$\dfrac{1}{2n^2}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{2n^2} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(3)　$\dfrac{(-4)^n}{2^{2n}} = (-1)^n$ より，この級数は発散する．

(4)　$\dfrac{1}{2n-1}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{2n-1} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(5)　$\cos \pi n = (-1)^n$ であり，また，$\dfrac{1}{n}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{n} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(6)　$\sin\left(\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ は，n が $1, 2, 3, \cdots$ と動くと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の 4 つの値を巡回する．これより，

$$S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

となるが，この各項の絶対値は単調減少で，0 に収束するので，S_{2n} は収束する．一方，$\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ も 0 に収束することから，S_{2n+1} も S_{2n} と同じ値に収束する．よって，この数列は収束する．

問 4　左辺は

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\log(x+1)]_0^1 = \log 2$$

である．一方右辺の積分は，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[(-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k\right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$$

となる．この右辺の第 2 項は，

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

より，$n \to \infty$ のとき，0 に収束する．よって，2 つ上の式で $n \to \infty$ とすれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$ となる．

問 5

(1)　例 1 より，絶対収束はしない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(2)　各項の絶対値をとると，公比が 2/3 の等比級数になるので，絶対収束する．

(3)　各項の絶対値をとると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ となるので，絶対収束する．

(4)　例 1 より，絶対収束はしない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(5)　$\log(n+1) < n+1$ と，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ が収束しないことから，定理 4 より，この級数は絶対収束

しない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(6) $\cos\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ は，n が $1,2,3,\cdots$ と動くと，$-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$ の 4 つの値を巡回する．よって，この級数の各項の絶対値をとったものは，$\frac{1}{2n}$ より大きくなる．さらに，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ は発散するから，この級数は絶対収束しない．一方，

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2(2k-1)}+\frac{1}{4k}\right)$$

の右辺の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，S_{2n} は収束する．さらに，$\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ は 0 に収束するので，S_{2n+1} も S_{2n} と同じ値に収束する．よって，この数列は条件収束する．

問 6 　例 1 より，$1<\alpha$ のとき絶対収束し，$0<\alpha\leqq 1$ のとき絶対収束しない．一方で，$0<\alpha\leqq 1$ のとき，この級数の各項の絶対値は単調減少で 0 に収束する．よって，このときこの級数は条件収束する．

問 7 　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ は発散するので，$\frac{1}{n}$ の奇数番目を足していくと，いくらでも大きくなることに注意しておく．ここで，まず奇数番目の項を和が 1 を超えるまで並べ，その後に第 2 項を並べる．次に奇数番目の項の続きを和が 2 を超えるまで並べ，その後に第 4 項を並べる．以下，これを繰り返せば第 $2n$ 項が出てくるときまで足した部分和は

$$n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

より大きくなる．さらに，この値より $n/2$ の方が小さいので，$n\to\infty$ としたとき，この値は無限大に発散する．よって，このように並べた級数は発散する．

6.2 べき級数

問 1

(1) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$$

なので，収束半径は 1.

(2) コーシーの定理を用いれば.

$$1 \Big/ \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n} = 2$$

なので，収束半径は 2.

(3) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n!}{1/(n+1)!} = n+1 \to \infty$$

なので，収束半径は ∞.

(4) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/\log(n+2)}{1/\log(n+3)} = \frac{\log(n+3)}{\log(n+2)} \to 1$$

より，収束半径は 1。

(5) コーシーの定理を用いれば,

$$\left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3}$$

より，収束半径は 1/3.

(6) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = 2^{2^n - 2^{n+1}} \to 0$$

より，収束半径は 0.

(7) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{5^n/n!}{5^{n+1}/(n+1)!} = \frac{n+1}{5} \to \infty$$

より，収束半径は ∞.

(8) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{n^n/n!}{(n+1)^{n+1}/(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

より，収束半径は $1/e$.

(9) ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n^p}{1/(n+1)^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \to 1$$

より，収束半径は 1。

問 2

(1)　等比級数の和を考えれば,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{x+1}$$

となる.

(2)　(1) で得られた式の両辺を積分すれば,

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}dt = [\log(t+1)]_0^x = \log(x+1)$$

と

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

より,　$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ となる.

問 3

(1)　e^x の n 階微分は $\{e^x\}^{(n)} = e^x$ より, $\{e^x\}^{(n)}|_{x=0} = 1$ である. よって, マクローリン展開は $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ である. これを項別微分すれば, $\{x^n\}` = nx^{n-1}$ より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

となる.

(2)　$\sin x$ の微分は, $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$ と巡回するので, この微分の $x = 0$ のときの値は $1, 0, -1, 0$ を巡回する. すなわち, $\{\sin x\}^{(n)}|_{x=0}$ は, n が偶数のとき 0 で, $n = 2k+1$ のとき, $(-1)^k$ となる. よって, $\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

となる. 同様に, $\{\cos x\}^{(n)}|_{x=0}$ は, n が奇数のとき 0 で, $n = 2k$ のとき, $(-1)^k$ となる. よって, $\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}$$

$\sin x$ の項別微分が $\cos x$ になるのは, $\{x^{2n+1}\}' = (2n+1)x^{2n}$ よりすぐにわかる. また, $\cos x$ の項別微分は,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}\right\}' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$$

となる.

演習問題 6

1.

(1)　初項 1，公比 1/2 の等比級数なので，収束し，その和は 2 である．

(2)　部分分数分解をすれば，

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

より，

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

となるので，この級数は収束し，その和は 11/18 である．

(3)　6.1 節例 1 より，この級数は発散する．

(4)　$n/\log(n+1) \geq 1$ なので，定理 1 よりこの級数は発散する．

(5)　部分分数分解をすれば，

$$\frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

より，

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

となるので，この級数は収束し，その和は 1/4 である．

(6)　$2^n/n^5 \to \infty$ なので，定理 1 より，この級数は発散する．

2.

(1)　6.1 節例 1 より，この級数は収束する．

(2)　6.1 節例 1 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するので，定理 1 よりこの級数は発散する．

(3)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{n+1/e^{3(n+1)}}{n/e^{3n}} = \frac{n+1}{e^3 n} \to \frac{1}{e^3} < 1$$

より，この級数は収束する．

(4)　6.1 節例 1 より，この級数は発散する．

(5)　$(\log n)/n \to 0$ より，$\sqrt[n]{n} \to 1$．よって定理 1 より，この級数は発散する．

(6)　$\cos n$ は発散するので，定理 1 より，この級数は発散する．

(7)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{(n+1)!/(2(n+1))!}{n!/(2n)!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

より，この級数は収束する．

(8)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2/(2(n+1))!}{2^n(n!)^2/(2n)!} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{2}$$

より，この級数は収束する．

(9)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{(2(n+1))!!/(2(n+1))!}{(2n)!!/(2n)!} = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

より，この級数は収束する．

3.

(1)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{3n}{2n^2-3n+4} \to 0$ より，この級数は収束する．

(2)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{3n^2}{2n^2+5n-2} \to \dfrac{3}{2} > 1$ より，この級数は発散する．

(3)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{\log n}{n} \to 0$ より，この級数は収束する．

(4)　コーシーの判定法を用いれば，$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$ より，この級数は収束する．

4.

(1)　6.1 節例 1 より，この級数は絶対収束しない．一方，この級数の各項の絶対値は，単調減少で 0 に収束するから，ライプニッツの定理より，条件収束する．

(2)　6.1 節例 1 より，この級数は絶対収束する．

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{2n}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することから，この級数は絶対収束しない．一方，一方，この級数の各項の絶対値は，単調減少で 0 に収束するから，ライプニッツの定理より，条件収束する．

(4)　$\cos(1/n) \to 1$ より，この級数の項は 0 に収束しない．よって，この級数は発散する．

5.

(1)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1}{1} = 1$ なので，収束半径は 1.

(2)　ダランベールの定理より，$\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 1$ なので，収束半径は 1.

(3)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1/3n}{1/3(n+1)} \to 1$ なので，収束半径は 1.

(4)　ダランベールの定理より，$\dfrac{\log(n+1)}{\log(n+2)} \to 1$ なので，収束半径は 1.

(5)　コーシーの定理より，$\left(\dfrac{1}{4^n}\right)^{1/n} = \dfrac{1}{4}$ なので，収束半径は 4.

(6)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1/(2n)!}{1/(2(n+1))!} = (2n+2)(2n+1) \to \infty$ より，収束半径は ∞.

(7)　ダランベールの定理より，

$$\frac{2^n/\log(n+1)}{2^{n+1}/\log(n+2)} = \frac{\log(n+2)}{2\log(n+1)} \to \frac{1}{2}$$

なので，収束半径は $\dfrac{1}{2}$.

(8)　コーシーの定理から，$\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$ なので，収束半径は 2.

(9)　$\dfrac{n!}{(2n)!!} = \dfrac{1}{2^n}$ なので，コーシーの定理から，収束半径は 2.

6.

(1)　6.2 節問 3 の e^x の x に，$2x$ を代入すればよいので，$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n/n!$ となる．

(2)　6.2 節問 3 の $\sin x$ の x に，$3x$ を代入すればよいので，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^{2n+1}/(2n+1)!$ となる．

(3)　等比級数の和を考えれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{x^3+1}$$

となる．

(4)　まず，$\dfrac{1}{x+2}$ のマクローリン展開を考えると，等比級数の和より，

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-x/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$$

となる．この両辺を積分すれば，左辺は

$$\int_0^x \frac{1}{t+2}dt=[\log(t+2)]_0^x=\log(x+2)-\log 2$$

となり，右辺は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}x^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}x^n$$

となる．よって，

$$\log(x+2)=\log 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}x^n$$

となる．
(5)　(4) より，

$$\begin{aligned}\log\frac{2-x}{2+x}&=\log(2-x)-\log(2+x) &(1)\\ &=\log 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}(-x)^n-\left(\log 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}x^n\right) &(2)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)2^{2n}}x^{2n-1}\end{aligned}$$

となる．
(6)　$\{(x+1)\log(x+1)\}'=\log(x+1)+1$ より，この両辺の $[0,x]$ における定積分を求めれば，左辺は $(x+1)\log(x+1)$ になる．右辺は，6.2 節問 2(2) の結果を項別積分して，

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

となる．

7.　$a_n\to 0$ であるから，有限個の n を除いて，$a_n<1$ である．よって有限個の n を除いて，$a_n^2<a_n$ となる．定理 4 より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2$ は収束する．

8.　6.2 節問 3 の e^x の x に，ax を代入すれば，$\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n/n!$ となる．これを項別微分すれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}an(ax)^{n-1}/n!=a\sum_{n=1}^{\infty}(ax)^{n-1}/(n-1)!=ae^{ax}$$

となる．