演習問題 6

1.

(1) 初項 1，公比 1/2 の等比級数なので，収束し，その和は 2 である．

(2) 部分分数分解をすれば，

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

より，

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

となるので，この級数は収束し，その和は 11/18 である．

(3) 6.1 節例 1 より，この級数は発散する．

(4) $n/\log(n+1) \geq 1$ なので，定理 1 よりこの級数は発散する．

(5) 部分分数分解をすれば，

$$\frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

より，

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

となるので，この級数は収束し，その和は 1/4 である．

(6) $2^n/n^5 \to \infty$ なので，定理 1 より，この級数は発散する．

2.

(1) 6.1 節例 1 より，この級数は収束する．

(2) 6.1 節例 1 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するので，定理 1 よりこの級数は発散する．

(3) ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{n+1/e^{3(n+1)}}{n/e^{3n}} = \frac{n+1}{e^3 n} \to \frac{1}{e^3} < 1$$

より，この級数は収束する．

(4) 6.1 節例 1 より，この級数は発散する．

(5) $(\log n)/n \to 0$ より，$\sqrt[n]{n} \to 1$．よって定理 1 より，この級数は発散する．

(6) $\cos n$ は発散するので，定理 1 より，この級数は発散する．

(7) ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{(n+1)!/(2(n+1))!}{n!/(2n)!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

より，この級数は収束する．

(8)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2/(2(n+1))!}{2^n(n!)^2/(2n)!} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{2}$$

より，この級数は収束する．

(9)　ダランベールの判定法を用いれば，

$$\frac{(2(n+1))!!/(2(n+1))!}{(2n)!!/(2n)!} = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

より，この級数は収束する．

3.

(1)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{3n}{2n^2-3n+4} \to 0$ より，この級数は収束する．

(2)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{3n^2}{2n^2+5n-2} \to \dfrac{3}{2} > 1$ より，この級数は発散する．

(3)　コーシーの判定法を用いれば，$\dfrac{\log n}{n} \to 0$ より，この級数は収束する．

(4)　コーシーの判定法を用いれば，$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$ より，この級数は収束する．

4.

(1)　6.1 節例 1 より，この級数は絶対収束しない．一方，この級数の各項の絶対値は，単調減少で 0 に収束するから，ライプニッツの定理より，条件収束する．

(2)　6.1 節例 1 より，この級数は絶対収束する．

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{2n}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することから，この級数は絶対収束しない．一方，一方，この級数の各項の絶対値は，単調減少で 0 に収束するから，ライプニッツの定理より，条件収束する．

(4)　$\cos(1/n) \to 1$ より，この級数の項は 0 に収束しない．よって，この級数は発散する．

5.

(1)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1}{1} = 1$ なので，収束半径は 1.

(2)　ダランベールの定理より，$\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 1$ なので，収束半径は 1.

(3)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1/3n}{1/3(n+1)} \to 1$ なので，収束半径は 1.

(4)　ダランベールの定理より，$\dfrac{\log(n+1)}{\log(n+2)} \to 1$ なので，収束半径は 1.

(5)　コーシーの定理より，$\left(\dfrac{1}{4^n}\right)^{1/n} = \dfrac{1}{4}$ なので，収束半径は 4.

(6)　ダランベールの定理より，$\dfrac{1/(2n)!}{1/(2(n+1))!} = (2n+2)(2n+1) \to \infty$ より，収束半径は ∞.

(7)　ダランベールの定理より，

$$\frac{2^n/\log(n+1)}{2^{n+1}/\log(n+2)} = \frac{\log(n+2)}{2\log(n+1)} \to \frac{1}{2}$$

なので，収束半径は $\dfrac{1}{2}$.

(8)　コーシーの定理から，$\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$ なので，収束半径は 2.

(9)　$\dfrac{n!}{(2n)!!} = \dfrac{1}{2^n}$ なので，コーシーの定理から，収束半径は 2.

6.

(1)　6.2 節問 3 の e^x の x に，$2x$ を代入すればよいので，$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n/n!$ となる.

(2)　6.2 節問 3 の $\sin x$ の x に, $3x$ を代入すればよいので, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^{2n+1}/(2n+1)!$ となる.

(3)　等比級数の和を考えれば,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{x^3+1}$$

となる.

(4)　まず，$\dfrac{1}{x+2}$ のマクローリン展開を考えると，等比級数の和より，

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$$

となる．この両辺を積分すれば，左辺は

$$\int_0^x \frac{1}{t+2}dt = [\log(t+2)]_0^x = \log(x+2) - \log 2$$

となり，右辺は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}x^n$$

となる．よって，

$$\log(x+2) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n$$

となる．

(5)　(4) より，

$$\begin{aligned}\log\frac{2-x}{2+x} &= \log(2-x) - \log(2+x) \\ &= \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}(-x)^n - \left(\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)2^{2n}} x^{2n-1}\end{aligned}$$

となる．

(6)　$\{(x+1)\log(x+1)\}' = \log(x+1) + 1$ より，この両辺の $[0, x]$ における定積分を求めれば，左辺は $(x+1)\log(x+1)$ になる．右辺は，6.2 節問 2(2) の結果を項別積分して，

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

となる．

7.　$a_n \to 0$ であるから，有限個の n を除いて，$a_n < 1$ である．よって有限個の n を除いて，$a_n^2 < a_n$ となる．定理 4 より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ は収束する．

8.　6.2 節問 3 の e^x の x に，ax を代入すれば，$\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n/n!$ となる．これを項別微分すれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} an(ax)^{n-1}/n! = a\sum_{n=1}^{\infty}(ax)^{n-1}/(n-1)! = ae^{ax}$$

となる．