6.2　べき級数

問 1

(1)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$$

なので，収束半径は 1.

(2)　コーシーの定理を用いれば.

$$1\Big/\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n} = 2$$

なので，収束半径は 2.

(3)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n!}{1/(n+1)!} = n+1 \to \infty$$

なので，収束半径は ∞.

(4)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/\log(n+2)}{1/\log(n+3)} = \frac{\log(n+3)}{\log(n+2)} \to 1$$

より，収束半径は 1。

(5)　コーシーの定理を用いれば,

$$\left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3}$$

より，収束半径は 1/3.

(6)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = 2^{2^n - 2^{n+1}} \to 0$$

より，収束半径は 0.

(7)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{5^n/n!}{5^{n+1}/(n+1)!} = \frac{n+1}{5} \to \infty$$

より，収束半径は ∞.

(8)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{n^n/n!}{(n+1)^{n+1}/(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

より，収束半径は $1/e$.

(9)　ダランベールの定理を用いれば,

$$\frac{1/n^p}{1/(n+1)^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \to 1$$

より，収束半径は 1。

問 2

(1)　等比級数の和を考えれば,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{x+1}$$

となる.

(2)　(1) で得られた式の両辺を積分すれば,

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}dt = [\log(t+1)]_0^x = \log(x+1)$$

と

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

より，$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ となる.

問 3

(1)　e^x の n 階微分は $\{e^x\}^{(n)} = e^x$ より，$\{e^x\}^{(n)}|_{x=0} = 1$ である．よって，マクローリン展開は $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ である．これを項別微分すれば，$\{x^n\}` = nx^{n-1}$ より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

となる.

(2)　$\sin x$ の微分は，$\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$ と巡回するので，この微分の $x=0$ のときの値は $1, 0, -1, 0$ を巡回する．すなわち，$\{\sin x\}^{(n)}|_{x=0}$ は，n が偶数のとき 0 で，$n = 2k+1$ のとき，$(-1)^k$ となる．よって，$\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

となる．同様に，$\{\cos x\}^{(n)}|_{x=0}$ は，n が奇数のとき 0 で，$n = 2k$ のとき，$(-1)^k$ となる．よって，$\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}$$

$\sin x$ の項別微分が $\cos x$ になるのは，$\{x^{2n+1}\}' = (2n+1)x^{2n}$ よりすぐにわかる．また，$\cos x$ の項別微分は，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\right\}' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$$

となる．