6章の解答例

6.1　級数

問 1

(1)　例 1 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散する．もし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ が収束すると，定理 1 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないといけないので，矛盾である．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ は発散する．

(2)　$\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n^2}$ と，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することから，定理 4 を使えば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ は収束することがわかる．

(3)　$\displaystyle\frac{n}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n}$ と，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することから，定理 4 を使えば，この級数は発散する．

(4)　$\log n\leq n^{1/2}$ より $\displaystyle\frac{\log n}{n^2}\leq n^{-3/2}$ である．ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}$ が収束するので，定理 4 より，この級数は収束する．

(5)　$\log(n+1)\leq n$ より，$\displaystyle\frac{1}{\log(n+1)}\geq\frac{1}{n}$ である．ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散するので，定理 4 より，この級数は発散する．

(6)　$f(x)=x^2e^{-x^3}$ とおくと，$f'(x)=2xe^{-x^3}-3x^4e^{-x^3}=xe^{-x^3}(2-3x^3)$ より，$[1,\infty)$ で $f'(x)<0$ となる．よって，$f(x)$ は $[1,\infty)$ 上の連続な単調減少関数で，$f(n)=n^2e^{-n^3}$ を満たす．さらに，

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^R=\frac{1}{3}e^{-1}$$

なので，定理 3 より，この級数は収束する．

(7)　$n\geq 4$ のとき，$n!\geq n^2$ なので，$\displaystyle\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n^2}$ である．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので，定理 4 より，この級数は収束する．

(8)　$n\leq 2^n$，$2n\leq 2^n$ より，$\displaystyle\frac{n}{2^{2^n}}\leq\frac{1}{2^{2^n-n}}\leq\frac{1}{2^n}$ となる．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は収束す

るので，定理 4 より，この級数は収束する．

(9)　$f(x) = xe^{-2x}$ とおくと，$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$ より，$[1, \infty)$ で $f'(x) < 0$ となる．よって，$f(x)$ は $[1, \infty)$ 上の連続な単調減少関数で，$f(n) = ne^{-2n}$ を満たす．さらに，

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_1^R = \frac{3}{4}e^{-2}$$

なので，定理 3 より，この級数は収束する．

問 2

(1)　$\dfrac{1}{(n+1)!}\Big/\dfrac{1}{n!} = 1/(n+1) \to 0$ より，ダランベールの判定法を使えば，この級数は収束する．

(2)　$\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{n+1}{2} \to \infty$ より，この級数は発散する．

(3)　$\dfrac{(n+1)}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3n} \to \dfrac{1}{3}$ より，この級数は収束する．

(4)　$\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$ より，コーシーの判定法を使えば，この級数は収束する．

(5)　$\sin\frac{1}{n} \to 0$ より，この級数は収束する．

(6)　$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1}$ より，この級数は収束する．

(7)　$\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$ より，この級数は収束する．

(8)　$\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^p}\Big/\dfrac{n!}{n^p} = \dfrac{(n+1)n^p}{(n+1)^p} \to \infty$ より，この級数は発散する．

(9)　$\dfrac{(n+1)^p e^{-(n+1)}}{n^p e^{-n}} = \dfrac{(n+1)^p}{en^p} \to \dfrac{1}{e}$ より，この級数は収束する．

問 3

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ なので，ライプニッツの定理より，この級数は収束する．

(2)　$\dfrac{1}{2n^2}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{2n^2} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(3)　$\dfrac{(-4)^n}{2^{2n}} = (-1)^n$ より，この級数は発散する．

(4)　$\dfrac{1}{2n-1}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{2n-1} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(5)　$\cos \pi n = (-1)^n$ であり，また，$\dfrac{1}{n}$ は単調減少で，$\dfrac{1}{n} \to 0$ なので，この級数は収束する．

(6)　$\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ は，n が $1,2,3,\cdots$ と動くと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の 4 つの値を巡回する．これより，

$$S_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

となるが，この各項の絶対値は単調減少で，0 に収束するので，S_{2n} は収束する．一方，$\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ も 0 に収束することから，S_{2n+1} も S_{2n} と同じ値に収束する．よって，この数列は収束する．

問 4　左辺は

$$\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=[\log(x+1)]_0^1=\log 2$$

である．一方右辺の積分は，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k\right]_0^1+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$$

となる．この右辺の第 2 項は，

$$0\leq\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx\leq\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$$

より，$n\to\infty$ のとき，0 に収束する．よって，2 つ上の式で $n\to\infty$ とすれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$ となる．

問 5

(1)　例 1 より，絶対収束はしない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(2)　各項の絶対値をとると，公比が 2/3 の等比級数になるので，絶対収束する．

(3)　各項の絶対値をとると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$ となるので，絶対収束する．

(4)　例 1 より，絶対収束はしない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(5)　$\log(n+1)<n+1$ と，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ が収束しないことから，定理 4 より，この級数は絶対収束しない．一方，各項の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，ライプニッツの定理から収束する．よって，この級数は条件収束する．

(6)　$\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ は，n が $1, 2, 3, \cdots$ と動くと，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}$ の 4 つの値を巡回する．よって，この級数の各項の絶対値をとったものは，$\dfrac{1}{2n}$ より大きくなる．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ は発散するから，この級数は絶対収束しない．一方，

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2(2k-1)}+\frac{1}{4k}\right)$$

の右辺の絶対値は単調減少で 0 に収束するので，S_{2n} は収束する．さらに，$\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ は 0 に収束するので，S_{2n+1} も S_{2n} と同じ値に収束する．よって，この数列は条件収束する．

問 6　例 1 より，$1<\alpha$ のとき絶対収束し，$0<\alpha \leqq 1$ のとき絶対収束しない．一方で，$0<\alpha \leqq 1$ のとき，この級数の各項の絶対値は単調減少で 0 に収束する．よって，このときこの級数は条件収束する．

問 7　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ は発散するので，$\dfrac{1}{n}$ の奇数番目を足していくと，いくらでも大きくなることに注意しておく．ここで，まず奇数番目の項を和が 1 を超えるまで並べ，その後に第 2 項を並べる．次に奇数番目の項の続きを和が 2 を超えるまで並べ，その後に第 4 項を並べる．以下，これを繰り返せば第 $2n$ 項が出てくるときまで足した部分和は

$$n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

より大きくなる．さらに，この値より $n/2$ の方が小さいので，$n\to\infty$ としたとき，この値は無限大に発散する．よって，このように並べた級数は発散する．