# 4　偏微分

### 4.1　2変数関数の極限と連続性

**問1**　(1)　$f(x,y)=x-y+1$ の値はすべての $(x,y)$ で定まるので，定義域は平面上のすべての点である．また，$(x,y,z)=(x,y,x-y+1)=x(1,0,1)+y(0,1,-1)+(0,0,1)$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，3点 $(0,0,1)$，$(0,1,0)$，$(-1,0,0)$ を通る平面となる．

(2)　$f(x,y)=x^2+y^2$ の値はすべての $(x,y)$ で定まるので，定義域は平面上のすべての点である．また，極座標表示 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ すると，$\theta$ によらずに $z=r^2$ となる．よって，$z=f(x,y)$ のグラフは，$xz$ 平面での曲線 $z=x^2$ を $z$ 軸中心に回転させたものとなる．

(3)　$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ は，$1-x^2-y^2\geq 0$ のとき定義されるので，定義域は半径1の円板とその内部である．また，極座標表示すると，$\theta$ によらず $z=\sqrt{1-r^2}$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，$xz$ 平面での曲線 $z=\sqrt{1-x^2}$ を $z$ 軸中心に回転させたものとなる．

(4)　$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ の値は $x^2-y^2=0$ となる点を除いて定まる．よって，定義域は2直線 $y=x$ と $y=-x$ を除く平面上のすべての点となる．また，$f(x,y)=c$ とすると，$x^2-y^2=\frac{1}{c}\ (c\neq 0)$ となり，これが $z=f(x,y)$ の等高線である．

(5)　$f(x,y)=xy$ の値はすべての $(x,y)$ で定まるので，定義域は平面上のすべての点となる．また，$f(x,y)=c$ を解くと，$y=\frac{c}{x}$ が $z=f(x,y)$ の等高線となる．

(6)　$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ は $x^2+y^2=0$ となる点を除いて定まるので，定義域は原点を除く平面上のすべての点となる．また，極座標表示すると，$\theta$ によらず $z=2\log r$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，$xz$ 平面での曲線 $z=2\log|x|$ を $z$ 軸を中心に回転させたものとなる．

**問2**　(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2-y^3)=1.$

(2)　$f(x,y)=\dfrac{x^3-y^4}{x^2+y^2}$ を極座標表示すると，$|f(x,y)|=r|\cos^3\theta-r\sin^4\theta|\leq r(1+r)$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=r(1+r)$ とおくと，$\epsilon(r)$ は $\theta$ によらない関数で，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(3)　$f(x,y)=xy\log(x^2+y^2)$ を極座標表示すると，$|f(x,y)|\leq 2r^2\log r$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=2r^2\log r$ とおくと，$\epsilon(r)$ は $\theta$ によらない関数である．また，ロピタルの定理より，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=\lim_{r\to 0}\left(-\frac{r^2}{2}\right)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(4)　$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上では $f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}\dfrac{1}{x}$ なので，$x\to 0$ の極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない．

(5)　$f(x,y)-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を極座標変換すると，$|f(x,y)|\leq r$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=r$ とおくと，$\epsilon(r)$ は $\theta$ によらない関数で，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(6)　$f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y}$ は，直線 $y=0$ 上では $f(x,y)=0$ である．一方，直線 $x=0$ 上では $f(x,y)=1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない．

**問3**　(1)　$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上で $f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}$ となり，原点への近づけ方によらない極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない．一方，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{y\to 0}f(x,y)=0$ なので，一方，累次極限は

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0.$$

(2)　$f(x,y)=\dfrac{y(x-y)}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上で $f(x,y)=\dfrac{m-m^2}{1+m^2}$ となり，原点への近づけ方に

よらない極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

(3)　$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$ は，直線 $y = mx$ 上では $f(x,y) = \dfrac{m}{1+m^2}$ なので，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

(4)　$f(x,y) = \dfrac{x}{x+y^2}$ は，直線 $x = 0$ 上では $f(x,y) = 0$，直線 $y = 0$ 上では $f(x,y) = 1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

(5)　$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x+y}$ は，$y = mx\ (x > 0)$ 上では $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{|m|}}{1+m}$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

(6)　$f(x,y) = \dfrac{2x-3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は，直線 $x = 0$ の $y > 0$ の部分では，$f(x,y) = -3$，直線 $x = 0$ の $y < 0$ の部分では，$f(x,y) = 3$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0} f(x,y)$ は存在しない．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y) = -3\frac{y}{|y|}$，$\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y) = 2\frac{x}{|x|}$ なので，累次極限も存在しない．

**問 4**　(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x+3y) = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y = 1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x+3y)\cos y = 0\cdot 1 = 0.$

(2)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2) = 2$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{x^2+y^2} = e^2.$

(3)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin x\cos y = 0\cdot 1 = 0.$

(4)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} e^{y^2}\log x = 1\cdot 0 = 0.$

(5)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy+2\sin\pi y+1}{x^2+y^2} = \frac{2-2\cdot 0+1}{1+4} = \frac{3}{5}.$

(6)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} xy\log|xy| = 1\cdot 0 = 0.$

**問 5**　(1)　$F(z) = e^z$ と $g(x,y) = x^2+y^2$ は連続なので，合成関数 $F(g(x,y)) = e^{x^2+y^2}$ は平面上のすべての点で連続である．よって，$f(x,y) = 1+xe^{x^2+y^2}$ も平面上のすべての点で連続である．

(2)　$F(z) = \log(1+z)\ (z > 0)$ と $g(x,y) = x^2+y^2$ は連続なので，$f(x,y) = F(g(x,y)) = \log(1+x^2+y^2)$ は平面上のすべての点で連続である．

(3)　$\sin(x+y)$ と $\cos(x-y)$ の連続性は，$\sin z$，$\cos z$ および $x\pm y$ の連続性から導かれる．よって，それらの積である $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$ は，平面上のすべての点で連続である．

(4)　(3) と同様にして，$\sin(x+y)$ と $\cos(x+y)$ は連続であり，$1+z^2$ が連続であることから合成関数 $1+\cos^2(x+y)$ も連続である．また，$1+\cos^2(x+y) \geq 1 > 0$ なので，$f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{1+\cos^2(x+y)}$ は平面上のすべての点で連続である．

(5)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないので，$f(x,y)$ は原点において連続でない．一方，原点以外では $x^2+y^2 > 0$ なので，原点を除く平面上のすべての点で $f(x,y)$ は連続である．

(6)　原点以外では $x^2+y^2>0$ なので，$f(x,y)$ は連続である．また，極座標表示すると $f(x,y)=2r^2\log r$ となる．ロピタルの定理より

$$\lim_{r\to 0} 2r^2\log r = 2\lim_{r\to 0}\frac{(\log r)'}{(r^{-2})'} = -\lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$．よって，原点においても連続なので，$f(x,y)$ は平面上のすべての点で連続である．

## 4.2 偏微分と全微分

**問 1** (1) $f(x,y) = y^2 \sin x$ とすると，$h \to 0$ のとき，

$$\frac{f(\pi+h,1)-f(\pi,1)}{h} = \frac{\sin(\pi+h)}{h} = -\frac{\sin h}{h} \to -1$$

なので，$f_x(\pi,1) = -1$．また，

$$\frac{f(\pi,1+k)-f(\pi,1)}{k} = 0$$

なので，$f_y(\pi,1) = 0$.

(2) $f(x,y) = xy^2 + x$ とすると，

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \frac{2(1+h)-2}{h} = 2$$

なので，$f_x(1,1) = 2$．また，$k \to 0$ のとき，

$$\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = \frac{2k+k^2}{k} = 2+k \to 2$$

なので，$f_y(1,1) = 2$.

(3) $f(x,y) = x^2 - y^2$ とすると，

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = h \to 0 \quad (h \to 0),$$

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = -k \to 0 \quad (k \to 0)$$

なので，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(4) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ とすると，

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

なので，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(5) $f(x,y) = y^x$ とすると，

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = 0, \quad \frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = 1$$

なので，$f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 1$.

(6) $f(x,y) = \sin^{-1}\frac{y}{x}$ とすると，

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \frac{\sin^{-1}\frac{1}{1+h} - \frac{\pi}{2}}{h} = -\frac{\cos^{-1}\frac{1}{1+h}}{h}$$

となる．ここで，逆三角関数の関係 $\cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$ を用いた．また，導関数の公式 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いると，ロピタルの定理より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{(\cos^{-1}\frac{1}{1+h})'}{(h)'} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+h)\sqrt{(1+h)^2-1}} - \infty.$$

同様に，

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = -\lim_{k\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-(1+k)^2}} = \infty.$$

以上より，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ において偏微分可能でない．

**問 2**　(1)　$f(x,y)=x^2-y^2$ とすると，$f_x=2x$，$f_y=-2y$.

(2)　$f(x,y)=(x+y)^3$ とすると，$f_x=3(x+y)^2$，$f_y=3(x+y)^2$.

(3)　$f(x,y)=\sin(2x+y)$ とすると，$f_x=2\cos(2x+y)$，$f_y=\cos(2x+y)$.

(4)　$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$f_y=-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

(5)　$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$.

(6)　$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$，$f_y=-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$.

(7)　$f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ とすると，$f_x=\dfrac{2x}{y}$，$f_y=-\dfrac{x^2}{y^2}$.

(8)　$f(x,y)=e^{x^3+2y^2}$ とすると，$f_x=3x^2e^{x^3+2y^2}$，$f_y=4ye^{x^3+2y^2}$.

(9)　$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ とする．公式 $\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$ を用いると，

$$f_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

同様に，

$$f_y=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

**問 3**　(1)　$z_x=4x$，$z_y=-6y$ なので，$dz=4xdx-6ydy$.

(2)　$z_x=-2\sin(2x+3y)$，$z_y=-3\sin(2x+3y)$ なので，$dz=-\sin(2x+3y)(2dx+3dy)$.

(3)　$z_x=2xe^{x^2+y^2}$，$z_y=2ye^{x^2+y^2}$ なので，$dz=2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)$.

(4)　$z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ なので，$dz=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(5)　$z_x=y\cos xy$，$z_y=x\cos xy$ なので，$dz=\cos xy(ydx+xdy)$.

(6)　$z_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$z_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ なので，$dz=2\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

(7)　$z_x=-\dfrac{y(x^2+y^2)}{x^2-y^2)^2}$，$z_y=\dfrac{x(x^2+y^2)}{x^2-y^2)^2}$ なので，$dz=\dfrac{(x^2+y^2)(-ydx+xdy)}{(x^2-y^2)^2}$.

(8)　$z_x=\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$，$z_y=\dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ なので，$dz=\dfrac{4xy(ydx-xdy)}{(x^2+y^2)^2}$.

(9)　$z_x=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，$z_y=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ なので，$dz=\dfrac{y^3dx+x^3dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

**問 4**　(1)　$f_x=2xy$，$f_y=x^2$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=2xyx'+x^2y'$.

(2)　$f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2(xx'+yy')}{x^2+y^2}$.

(3)　$f_x=\dfrac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{(x^2-y^2)(-yx'+xy')}{(x^2+y^2)^2}$.

(4)　$f_x=\dfrac{-x}{1-x^2-y^2}$，$f_y=\dfrac{-y}{1-x^2-y^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=-\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

**問 5**　(1)　$y'=2$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+2f_y$.

(2)　$y'=2x$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+2xf_y$.

(3)　$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x-\dfrac{xf_y}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4)　$y'=(1+2x^2)e^{x^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+(1+2x^2)e^{x^2}f_y$.

**問 6**　$x_r=\cos\theta$，$y_r=\sin\theta$ なので，

$$z_r=z_xx_r+z_yy_r=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta.$$

同様に，$x_\theta=-r\sin\theta$，$y_\theta=r\cos\theta$ なので，

$$z_\theta=z_xx_\theta+z_yy_\theta=-z_xr\sin\theta+z_yr\cos\theta.$$

**問 7**　(1)　$x_u=2$，$y_u=2$ なので，$z_u=2(z_x+z_y)$．$x_v=3$，$y_v=-3$ なので，$z_v=3(z_x-z_y)$．

(2)　$x_u=2u$，$y_u=2u$ なので，$z_u=2u(z_x+z_y)$．$x_v=2v$，$y_v=-2v$ なので，$z_v=2v(z_x-z_y)$．

(3)　$x_u=e^v$，$y_u=ve^u$ なので，$z_u=e^vz_x+ve^uz_y$．$x_v=ue^v$，$y_v=e^u$ なので，$z_v=ue^vz_x+e^uz_y$．

(4)　$x_u=\cosh v$，$y_u=\sinh v$ なので，$z_u=z_x\cosh v+z_y\sinh v$．$x_v=u\sinh v$，$y_v=u\cosh v$ なので，$z_v=z_xu\sinh v+z_yu\cosh v$．

**問 8**　(1)　$f(x,y)=2xy^2$ とすると，$f_x=2y^2$，$f_y=4xy$ なので，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=4$．よって，接平面の方程式は，$z=2+2(x-1)+4(y-1)$．これを整理して，$z=2x+4y-4$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$2(x-1)=y-1=-4(z-2)$．

(2)　$f(x,y)=x^2+y^2$ とすると，$f_x=2x$，$f_y=2y$ なので，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=2$．よって，接平面の方程式は，$z=2+2(x-1)+2(y-1)$．これを整理して，$z=2x+2y-2$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$x-1=y-1=-2(z-2)$．

(3)　$f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}$ とすると，$f_x=x$，$f_y=2y/3$ なので，$f_x(2,3)=2$，$f_y(2,3)=2$．よって，接平面の方程式は，$z=5+2(x-2)+2(y-3)$．これを整理して，$z=2x+2y-5$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$．これを整理して，$x-2=y-3=-2(z-5)$．

(4)　$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ なので，$f_x(1,2)=-1/2$，$f_y(1,2)=-1$．よって，接平面の方程式は，$z=2-\dfrac{1}{2}(x-1)-(y-2)$．これを整理して，$z=-\frac{x}{2}-y+\frac{9}{2}$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{-1/2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$2(x-1)=y-2=z-2$．

### 4.3　高次偏導関数

**問 1**　(1)　$f(x,y)=(2x+y)^2$ とすると，$f_x=4(2x+y)$，$f_y=2(2x+y)$，$f_{xx}=8$，$f_{xy}=f_{yx}=4$，$f_{yy}=2$.

(2)　$f(x,y)=\cosh(x+y)$ とすると，$f_x=f_y=\sinh(x+y)$．これを微分して，$f_{xx}=f_{xy}=f_{yx}=f_{yy}=\cosh(x+y)$.

(3)　$f(x,y)=e^x\log y^2$ とすると，$f_x=f$ なので，$f_{xx}=f_x=f$，$f_{xy}=f_y$．また，$f_y=\dfrac{2e^x}{y}$ なので，$f_{yx}=f_y=\dfrac{2e^x}{y}$，$f_{yy}=-\dfrac{2e^x}{y^2}$.

(4)　$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y=-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$．これらを微分して，$f_{xx}=\dfrac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$，$f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$，$f_{yy}=\dfrac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

(5)　$f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると，$f_x=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，$f_y=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$．これらを微分して，$f_{xx}=-\dfrac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$，$f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$，$f_{yy}=-\dfrac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

(6)　$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$．これらを微分して，$f_{xy}=f_{yx}=-\dfrac{2y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}$，$f_{xx}=f_{yy}=\dfrac{2x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}$

**問 2**　(1)　原点では,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

原点以外では，$f(x,y)=\dfrac{xy(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}$ なので，$f(x,y)$ は偏微分可能で,

$$f_x=\frac{y(x^4+2^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y=\frac{x(x^4+5x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

よって，$f_x$，$f_y$ は原点以外では連続である．極座標表示すると，$|f_x|\le 4r$，$|f_y|\le 8r$ となり，右辺は $\theta$ に依らない関数で，$r\to0$ のとき，0 に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0=f_x(0,0)$，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=0=f_y(0,0)$．以上から，$f$ はすべての点で偏微分可能で，$f_x$，$f_y$ はすべての点で連続であるのである．したがって，$f$ は $C^1$ 級である．

(2)　原点以外では，$f_x$ は偏微分可能で，$f_{xy}$ は直線 $x=0$ 上で $f_{xy}(0,y)=10$，直線 $y=0$ 上で $f_{xy}(x,0)=1$ である．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)$ が存在しない．したがって，$f_{xy}$ は原点で連続でない.

**問 3**　(1)　$f(x,y)=x^2+y^3$ とすると，$f_{xy}=0$ は定数関数なので，連続.

(2)　$f(x,y)=y^2e^{x^2}$ とすると，$f_{xy}=4xye^{x^2}$ なので，連続.

(3)　$f(x,y)=\sin^{-1}xy$ とすると，$f_{xy}=\frac{1}{\{1-(xy)^2\}^{3/2}}$．よって、$|xy|<1$ となる点 $(x,y)$ で連続.

(4)　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると，$f_{xy}=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ なので，原点を除いて連続.

(5)　原点以外では，$f(x,y)=\exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ なので，$f_{xy}=\dfrac{xy(1-3\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^3}f$ は連続で，極座標表示すると $|f_{xy}|\le(r^{-4}+3r^{-3})e^{-1/r}$ となり，右辺は $\theta$ によらない関数で，$r\to0$ のとき 0 に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)=0$．一方，原点では，$f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}h^{-1}e^{-1/|h|}=0$，$f_{xy}(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=0$ なので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)=$

$f_{xy}(0,0)$．よって，$f_{xy}$ は連続.

**問 4** $F(x,t)=f(x\pm at)$ とおくと，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}=a^2 f''(x\pm at)$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''(x\pm at)$．よって，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2(f''(x+at)+f''(x-at))=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

**問 5** (1) $f(x,y)=2x-y+1$ とすると，$f_{xx}=0$，$f_{yy}=0$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(2) $f(x,y)=x^2-y^2$ とすると，$f_{xx}=2$，$f_{yy}=-2$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(3) $f(x,y)=x^3-3xy^2$ とすると，$f_{xx}=6x$，$f_{yy}=-6x$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(4) $f(x,y)=e^x\cos y$ とすると，$f_{xx}=f$，$f_{yy}=-f$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(5) $f(x,y)=\cosh x\sin y$ とすると，$f_{xx}=f$，$f_{yy}=-f$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(6) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ とすると，$f_{xx}=\dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}=-f_{yy}=$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(7) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ とすると，$f_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2)}=-f_{yy}$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(8) $f(x,y)=\sin^{-1}u(x,y)$，$u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{u_x}{\sqrt{1-u^2}}$，$f_{xx}=\dfrac{u_{xx}(1-u^2)+uu_x^2}{(1-u^2)^{3/2}}$.
ここで，$u_{xx}(1-u^2)+uu_x^2=\dfrac{4xy(x^2-y^2)^3}{(x^2+y^2)^5}$ を $g(x,y)$ とおくと，$g(y,x)=-g(x,y)$ となる．よって，$f(y,x)=f(x,y)$，$u(y,x)=u(x,y)$ より，$f_yy(x,y)=f_{xx}(y,x)=-f_{xx}(x,y)$．したがって，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(9) $f(x,y)=\tan^{-1}u(x,y)$，$u(x,y)=\frac{y}{x}$ とすると，$f_x=\dfrac{u_x}{1+u^2}$，$f_y=\dfrac{u_y}{1+u^2}$．また，$u_x=-y/x^2$，$u_{xx}=2y/x^3$ より，$f_{xx}=\dfrac{2y}{x^3(1+u^2)^2}$．$u_y=1/x$，$u_{yy}=0$ より，$f_{yy}=\dfrac{-2y}{x^3(1+u^2)^2}=-f_{xx}$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

**問6** (1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_{xx}(x,y)=\dfrac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$，$f_{yy}(x,y)=\dfrac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$，$f_{xy}(x,y)=\dfrac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$ なので，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=1+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2f_{yy}(\theta x,\theta y))\\&=1-\frac{x^2+y^2}{2\{1-\theta^2(x^2+y^2)\}^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=\sin(x+y)$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$，$f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=-\sin(x+y)$ なので，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=0+x+y+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2f_{yy}(\theta x,\theta y))\\&=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2\sin(\theta(x+y)).\end{aligned}$$

(3) $f(x,y)=\cosh(x+y)$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=\cosh(x+y)$ なので，$f(x,y)=1+\dfrac{1}{2}(x+y)^2\cosh(\theta(x+y))$.

(4) $f(x,y)=\log(1-x^2-y^2)$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_{xx}(x,y)=\dfrac{2(y^2-x^2-1)}{(1-x^2-y^2)^2}$，$f_{xy}(x,y)=\dfrac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$，$f_{yy}(x,y)=\dfrac{2(x^2-y^2-1)}{(1-x^2-y^2)^2}$ なので，

$$f(x,y)=0+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2f_{yy}(\theta x,\theta y))$$

$$= -\frac{(x^2+y^2)\{1+\theta^2(x^2+y^2)\}}{\{1-\theta^2(x^2+y^2)\}^2}.$$

(5)　原点以外では，$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ となるので，合成関数の微分法を用いて計算する．このとき，$f(y,x) = f(x,y)$ より $f_{yy}(x,y) = f_{xx}(y,x)$ となることも利用するとよい．一方，原点では $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$．同様に，$f_y(0,0) = 0$ となる．以上から，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x,\theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x,\theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x,\theta y)) \\ &= \frac{2-3\theta^2(x^2+y^2)}{\theta^6(x^2+y^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2(x^2+y^2)}\right). \end{aligned}$$

**問 7**　テイラーの定理より，

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) &+ hf_x(a,b) + kf_y(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)\} \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(h,k)}{h^2+k^2} = \frac{1}{2}\Bigl\{ &\frac{h^2}{h^2+k^2}(f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b)) \\ &+ \frac{2hk}{h^2+k^2}(f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xy}(a,b)) \\ &+ \frac{k^2}{h^2+k^2}(f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))\Bigr\}. \end{aligned}$$

ここで，$\left|\dfrac{h^2}{h^2+k^2}\right|$, $\left|\dfrac{2hk}{h^2+k^2}\right|$, $\left|\dfrac{k^2}{h^2+k^2}\right|$ はすべて 1 以下なので，

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varepsilon(h,k)}{h^2+k^2}\right| \le \frac{1}{2}\Bigl\{ &|(f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))| \\ &+ |(f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xy}(a,b))| \\ &+ |(f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))|\Bigr\}. \end{aligned}$$

仮定より，$f_{xx}$，$f_{xy}$，$f_{yy}$ は連続なので，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{xx}(a,b)$，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{xy}(a,b)$，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{yy}(a,b)$ だから，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{(h^2+k^2)} = 0$ が言える．

### 4.4 偏微分の応用

**問 1** (1) 陰関数の微分法より，$2x-2+4yy'=0$．これを整理して，$y'=\frac{1-x}{2y}$.

(2) 陰関数の微分法より，$2x+2y+2xy'-4yy'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x+y}{x-2y}$

(3) 陰関数の微分法より，$3x^2+3y+3xy'3y^2y'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$

(4) 陰関数の微分法より，$\cosh(x+y)+\cosh(x+y)y'=0$.
これを整理して，$y'=-1$

**問 2** (1) $f(x,y)=2x^2+4y^2$ とすると，$f_x=4x$，$f_y=8y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．$A=f_{xx}(0,0)=4>0$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=8$，$D=-32<0$ より，原点で極小値 $0$ をもつ.

(2) $f(x,y)=x^2-3y^2$ とすると，$f_x=2x$，$f_y=-6y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$. $A=f_{xx}(0,0)=2$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=-6$，$D=12>0$ より，極値は存在しない.

(3) $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ とすると，$f_x=3x^2+3y$，$f_y=3x+3y^2$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),(-1,1)$．原点では，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=3$，$C=f_{yy}(0,0)=0$，$D=9>0$．また，点 $(-1,1)$ では，$A=f_{xx}(-1,1)=6$，$B=f_{xy}(-1,1)=0$，$C=f_{yy}(-1,1)=-6$，$D=45>0$．以上より，極値は存在しない.

(4) $f(x,y)=x+y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}$ とすると，$f_x=1-\dfrac{4}{x^2}$，$f_y=1-\dfrac{1}{y^2}$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$．点 $(2,1)$ では，$D<0$，$A>0$ なので，$f(2,1)=6$ は極小値．点 $(\pm2,\mp1)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $(-2,-1)$ では，$D<0$，$A<0$ より，$f(-2,-1)=-6$ は極大値.

(5) $f(x,y)=2x^2+2xy+y^4$ とすると，$f_x=4x+2y$，$f_y=2x+4y^3$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\dfrac{1}{4},\mp\dfrac{1}{2}\right)$)．原点では， $D>0$ より，極値をとらない..点 $\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}$ は極小値.

(6) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-y$ とすると，$f_x=4x^3+4x$，$f_y=3y^2-1$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．点 $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極小値.

(7) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=-2xf$，$f_y=-2yf$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．原点では，$D<0$，$A<0$ より，$f(0,0)=1$ は極大値.

(8) $f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 原点では, $D>0$ より, 極値をとらない. 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では, $D<0$, $A<0$ より, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2e}$ は極大値．点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$ は極小値.

**問 3** (1) $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$F_x(a,b)=2\neq0$ なので，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 4a^3-2\lambda=0 \\ 4b^3-\lambda=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$\lambda=2a^3$ かつ $\lambda=4b^3$ なので，$a=\sqrt[3]{2}b$. $2a+b=1$ より，$(a,b)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+2\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{2}}\right)$ が極値をとる点の候補となる.（なお，この点で $f(x,y)$ は極小値 $\dfrac{1}{(1+2\sqrt[3]{2})^3}$ をとる.）

(2) $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$F(a,b)=0$ より，$ab=1$ なので, $F_x(a,b)=$

$b \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法により，

$$\begin{cases} 4a - \lambda b = 0 \\ 4b - \lambda a = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$a(16-\lambda^2)=0$．$a \neq 0$ なので，$\lambda = \pm 4$．まず，$\lambda = -4$ のとき，$(*)$ より，$a=-b$．ところが，$ab=1$ なので，$b^2=-1$ で不適．次に，$\lambda = 4$ のとき，$(*)$ より，$a=b$．また，$ab=1$ なので，$(a,b)=(\pm 1, \pm 1)$ が極値をとる点の候補となる.（なお，これらの点で $f(x,y)$ は極小値 $4$ をとる.）

(3)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$F(a,b)=0$ より，$a^4b^2=1$ なので，$F_x(a,b)=4a^3b^2 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a - 4\lambda a^3 b^2 = 0 \\ 2b - 2\lambda a^4 b = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$\lambda = 1/(2a^2b^2)$ かつ $\lambda = 1/a^4$ なので，$a^2=2b^2$．$a^4b^2=1$ より，$(a,b)=(\pm\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[3]{2})$（複号任意） が極値をとる点の候補となる.（なお，これらの点で $f(x,y)$ は極小値 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ をとる.）

(4)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．このとき，$a^2+ab+b^2=4$ なので，$(a,b) \neq (0,0)$ である．よって，$F_x(a,b)=2a+b \neq 0$ または $F_y(a,b)=a+2b \neq 0$ となる．ゆえに，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1 - \lambda(2a+b) = 0 \\ 1 - \lambda(a+2b) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$3\lambda(a-b)=0$ となるが，$\lambda=0$ は上式を満たさないので不適．よって，$a=b$ となり，$a^2+ab+b^2=4$ から $a=b=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\lambda=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$ を得る．以上より，$(a,b)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ が極値をとる点の候補となる.（なお，$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ で $f(x,y)$ は極大値 $\frac{4}{\sqrt{3}}$ をとり，$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ で $f(x,y)$ は極小値 $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ をとる.）

**問 4**　(1)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$a^2+b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=2a$，$F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は $0$ でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b - 2a\lambda = 0 \\ a - 2b\lambda = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$\lambda = b/2a$ かつ $\lambda = a/2b$ なので，$a=\pm b$．$a^2+b^2=1$ なので，$(a,b)=(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ または $(a,b)=(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ となる．そこで，これらの $4$ つの点で実際に極値になっているかを調べる．

$F(x,y)=0$ を満たす点の集合は，原点を中心とする半径 $1$ の円であるから，これらの点の近くでの陰関数は $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ または $y(x)=-\sqrt{1-x^2}$ なので，$f(x,y(x))$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = \pm\frac{1-2x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x)) = \pm\frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．よって，$x=\pm 1/\sqrt{2}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=0$ がわかる．さらに，陰関数の符号に注意して計算すれば，$(a,b)=(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=-1$，$(a,b)=(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=1$ となる．

以上より，$f(x,y)$ は $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとり，$(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ で極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる．

(2)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$a^2+b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=2a$，$F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は $0$ でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1-2a\lambda=0 \\ 1-2b\lambda=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．$(*)$ の第 1 式と第 2 式の差をとると，

$$\lambda(a-b)=0.$$

$\lambda=0$ とすると，$(*)$ より $0=1-2a\lambda=1$ となるので不適．よって，$\lambda\neq 0$ としてよい．この場合，$a=b$．$a^2+b^2=1$ より，$2a^2=1$ なので，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a,b)=\pm\sqrt{2}$．

$F(x,y)=0$ を満たす点の集合は，原点を中心とする半径 1 の円であるから，これらの点の近くでの陰関数は $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ または $y(x)=-\sqrt{1-x^2}$ なので，$f(x,y(x))$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=1\mp x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=\mp(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

となる．よって，$x=\pm 1/\sqrt{2}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=0$ がわかる．さらに，陰関数の符号に注意して計算すれば，$(a,b)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=-(1/2)^{-\frac{3}{2}}$，$(a,b)=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=(1/2)^{-\frac{3}{2}}$ となる．

以上より，$f(x,y)$ は $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ で極大値 $\sqrt{2}$ をとり，$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ で極小値 $-\sqrt{2}$ をとる．

(3)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．このとき，$4a^2+b^2=1$ なので，$F_x(a,b)=8a$ と $F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は $0$ でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b-8a\lambda=0 \\ a-2b\lambda=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b(16\lambda^2-1)=0 \\ 2b\lambda=a \end{cases} \tag{$*$}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．$b=0$ とすると，$(*)$ より $a=0$．ところが，$1=4a^2+b^2=0$ となるので不適．よって，$b\neq 0$ としてよい．この場合，$(*)$ より，$\lambda=\pm 1/4$．

$\lambda=1/4$ のとき，$(*)$ より，$b=2a$．$4a^2+b^2=1$ より，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a,b)=1/4$．

$\lambda=-1/4$ のとき，$(*)$ より，$b=-2a$．$4a^2+b^2=1$ より，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a,b)=-1/4$．

$F(x,y)=0$ を満たす点の集合は楕円であるから，上記の 4 つの点の近くでの陰関数は $y=\sqrt{1-4x^2}$ または $y=-\sqrt{1-4x^2}$ である．よって，$f(x,y(x))$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=\pm\frac{1-8x^2}{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=\pm\frac{32x^3-12x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．よって，$x=\pm 1/2\sqrt{2}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=0$ がわかる．さらに，陰関数の符号に注意して計算すれば，$(a,b)=(\pm 1/2\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=-8$，$(a,b)=(\pm 1/\sqrt{2},\mp 1/\sqrt{2})$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=8$ となる．

以上より，$f(x,y)$ は $(\pm 1/2\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2})$ で極大値 $\frac{1}{4}$ をとり，$(\pm 1/2\sqrt{2},\mp 1/\sqrt{2})$ で極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる．

(4)　$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．このとき，$a^3-3ab+b^3=0$ である．$F_x(a,b)=3a^2-3b$，$F_y(a,b)=-3a+3b^2$ がともに 0 となるのは，$(a,b)=(0,0),(1,1)$ のときである．$(a,b)=(1,1)$ のときは，$1=a^3-3ab+b^3=0$ となり不適．そこで，以下では $(a,b)=(0,0)$ のときと，$(a,b)\neq 0$ のときで場合を分けて議論する．

$(a,b)=(0,0)$ のときは，任意の $x>0$，$y>0$ に対して $f(x,y)=x+y>0=f(a,b)$ なので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小値 0 をとり，これは最小値でもある．

$(a,b)\neq(0,0)$ のときは，$F_x(a,b)\neq 0$ または $F_y(a,b)\neq 0$ が成り立つ．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1-\lambda(3a^2-3b)=0 \\ 1-\lambda(3b^2-3a)=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．$(*)$ の第 1 式を $a$ 倍したものと，第 2 式を $b$ 倍したものとの差をとると，

$$(a-b)\{3\lambda(a^2+ab+b^2)-1\}=0$$

となる．$3\lambda(a^2+ab+b^2)-1=0$ とすると，$(*)$ より，

$$1=3\lambda a^2+3\lambda ab+3\lambda b^2=(3\lambda b+1)+3\lambda ab+(3\lambda a+1)$$

となるので，これを整理して，$3\lambda(a+ab+b)=-1$ を得る．$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ なので，$\lambda<0$ である．これは，$3\lambda(a^2+ab+b^2)=1$ に反する．よって，$3\lambda(a^2+ab+b^2)-1\neq 0$ なので，$a=b$ となる．これを $a^3-3ab+b^3=0$ に代入して，$(a,b)=(3/2,3/2)$ を得る．そこで，$f(x,y)$ がこの点で極値となるかどうかを以下で調べる．

点 $(3/2,3/2)$ の近くでの $F(x,y)=0$ の陰関数を $y=y(x)$ とし，$p(x)=f(x,y(x))$ とおく．このとき，$F(x,y(x))=0$，すなわち，$x^3-3xy(x)+y(x)^3=0$ を $x$ で 2 回微分すると，

$$\begin{cases} x^2-y(x)-xy'(x)+y(x)^2y'(x)=0 \\ 2x-2y'(x)-xy''(x)+2y(x)\{y'(x)\}^2+y(x)^2y''(x)=0 \end{cases}$$

となる．また，$p(x)=x+y(x)$ なので，

$$\begin{cases} p'(x)=1+y'(x) \\ p''(x)=y''(x) \end{cases}$$

である．ここで，$y(3/2)=3/2$ なので，上式より，$y'(3/2)=-1$，$y''(3/2)=-32/3$ となり，$p'(3/2)=0$，$p''(3/2)=-32/3<0$ を得る．ゆえに，$p(x)$ は $x=3/2$ で極大となる．すなわち，$f(x,y)$ は点 $(3/2,3/2)$ で極大値 $f(3/2,3/2)=3$ をとる．

**演習問題 4**

**1.** (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(3x^2-\log xy)=3$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=0$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y}{x^3-y^3}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{3}$.

(4) $y=mx$ とおくと，$\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1-m}{1+m}$ なので極限なし.

(5) $y=mx$ とおくと，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{m}$ なので極限なし.

(6) 4.3 節の問 7 を $f(x,y)=2-\cos x-\cos y$，$(a,b)=(0,0)$，$(h,k)=(x,y)$ として応用すると，

$$2-\cos x-\cos y=\frac{x^2+y^2}{2}+\varepsilon(x,y)$$

と表すとき，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}=0$ が成り立つ．ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2-\cos x-\cos y}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\frac{x^2+y^2}{2}+\varepsilon(x,y)}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2}{1+2\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}}=2.\end{aligned}$$

**2.** (1) $y=x^2$ とおくと，$f(x,y)=\frac{1}{2}$ なので，原点で不連続.

(2) 極座標表示すると，

$$|f(x,y)|=\left|\frac{r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\right|=\frac{r^2}{2}|\sin 2\theta\cos 2\theta|=\frac{r^2}{4}|\sin 4\theta|\leqq\frac{r^2}{4}$$

なので，原点で連続.

(3) $(x,y)=(t\cos t,t\sin t)$ 上では，$t\to 0$ のとき，$f(x,y)\to 1$ となるので，原点で不連続.

**3.** 与えられた関数を $f(x,y)$ とする．

(1) 直接計算から，$f_x=-4xf$, $f_y=-6yf$, $f_{xx}=4(4x^2-1)f$, $f_{yy}=6(6y^2-1)f$ を得る．また，$f_{xy}=24xyf$ は連続なので, シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=24xyf$.

(2) $u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x}{u}$，$f_y=-\dfrac{y}{u}$，

$$f_{xx}=-\frac{\{y^2+(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}}{u^3},\quad f_{yy}=-\frac{\{x^2+(y^2-x^2)(x^2+y^2)\}}{u^3}$$

を得る．また，$f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$.

(3) $u(x,y)=1+x^3+y^2$ とすると，$f_x=\dfrac{3x^2}{u}$, $f_y=2\dfrac{y}{u}$, $f_{xx}=\dfrac{3x(2+2y^2-x^3)}{u^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2(1+x^3-y^2)}{u^2}$ を得る．また，$f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$.

(4) $u(x,y)=1+\cos x+\cos y$ とすると，$f_x=\dfrac{\sin x}{u^2}$, $f_y=\dfrac{\sin y}{u^2}$,
$f_{xx}=\dfrac{1+\cos x+\cos x\cos y+\sin^2 x}{u^3}$，$f_{yy}=\dfrac{1+\cos y+\cos x\cos y+\sin^2 y}{u^3}$ を得る．また，$f_{xy}=2\dfrac{\sin x\sin y}{u^3}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=2\dfrac{\sin x\sin y}{u^3}$.

(5)　直接計算より，$f_x = \cosh x \cosh y$，$f_y = \sinh x \sinh y$，$f_{xy} = f_{yx} = \cosh x \sinh y$，$f_{xx} = f_{yy} = f$．

(6)　$f_x = \dfrac{1}{x}$，$f_y = \dfrac{1}{y \log y}$，$f_{xx} = -\dfrac{1}{x^2}$，$f_{yy} = -\dfrac{1 + \log y}{(y \log y)^2}$，$f_{xy} = f_{yx} = 0$．

**4.**　与えられた関数 $z$ に対して，$z_x$，$z_y$ を求め，$dz = z_x dx + z_y = dy$ とすればよい．

(1)　$dz = (4xy - 3y^2)dx + (2x^2 - 6xy)dy$　　(2)　$dz = \dfrac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}$

(3)　$dz = -\dfrac{2xdx + 3ydy}{(2x^2 + 3y^2)^{3/2}}$　　(4)　$dz = 2\exp\left(-\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)\dfrac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^2}$

**5.**　$f(x, y) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{4at}\right)$ とおくと，$u = \dfrac{1}{\sqrt{t}} f$ かつ $f_t = \dfrac{x^2}{4at^2} f$ なので，

$$u_t = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4at^{5/2}}\right) f.$$

また，$f_x = -\dfrac{x}{2at} f$ なので，

$$u_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2at} + \frac{x^2}{4a^2t^2}\right) f.$$
$$\therefore a u_x x = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4at^{5/2}}\right) f = u_t.$$

**6.**　(1)　$f(x, y) = \cos x \sin y$ とすると，$f(0, 0) = 0$，$f_x(0, 0) = 0$，$f_y(0, 0) = 1$, $f_{xx} = -\cos x \sin y$，$f_{xy} = -\sin x \cos y$，$f_{yy} = -\cos x \sin y$ なので，

$$f(x, y) = y - \frac{1}{2}(\cos\theta x)(\sin\theta y)(x^2 + y^2) - xy(\sin\theta x)(\cos\theta y)$$

(2)　$f(x, y) = \cosh x \sinh y$ とすると，$f(0, 0) = 0$，$f_x(0, 0) = 0$，$f_y(0, 0) = 1$, $f_{xx} = \cosh x \sinh y$，$f_{xy} = \sinh x \cosh y$，$f_{yy} = \cosh x \sinh y$ なので，

$$f(x, y) = y + \frac{1}{2}(\cosh\theta x)(\sinh\theta y)(x^2 + y^2) + xy(\sinh\theta x)(\cosh\theta y).$$

(3)　$f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ とすると，$f(0, 0) = 0$，$f_x(0, 0) = 0$，$f_y(0, 0) = 0$，$f_{xx} = \dfrac{2(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$，$f_{xy} = -\dfrac{4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$，$f_{yy} = \dfrac{2(1 + x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ なので，

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\frac{1 - \theta^2(x^2 + y^2)}{\{1 + \theta^2(x^2 + y^2)\}^2}.$$

(4)　$f(x, y) = e^{x+y}$ とすると，$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = f$ なので，

$$f(x, y) = 1 + (x + y) + \frac{1}{2}(x + y)^2 e^{\theta(x+y)}$$

**7.**　$x_r = \cos\theta$，$y_r = \sin\theta$ より，$f_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$．$x_\theta = -r\sin\theta$，$y_\theta = r\cos\theta$ より，$\frac{f_\theta}{r} = -\sin\theta f_x + \cos\theta f_y$．よって，

$$\begin{array}{rcl} (f_r)^2 & = & \cos^2\theta(f_x)^2 + 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \sin^2\theta(f_y)^2 \\ +\quad \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & \sin^2\theta(f_x)^2 - 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \cos^2\theta(f_y)^2 \\ \hline (f_r)^2 + \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & (f_x)^2 + (f_y)^2 \end{array}$$

**8.** (1) $f(x,y)=x^2+y^3-3y$ とすると，$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,\pm 1)$ である．$(x,y)=(0,-1)$ のときは，$D>0$ なので極値をもたない．$(x,y)=(0,1)$ のときは，$D<0$ かつ $A>0$ より極小値 $f(0,1)=-2$ をもつ．

(2) $f(x,y)=\cosh(x^2+y^2)$ とすると，$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$．この場合，$D=0$ となるので，定理 11 は適用できない．しかし，$r=x^2+y^2$ とおくと，$r \geqq 0$ で，$r=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$．また，$r>0$ のとき，$\cosh r > \cosh 0 = 1$．ゆえに，$(x,y)\neq(0,0)$ ならば $f(x,y)>f(0,0)=1$．すなわち，$f$ は原点において極小値 1 をもつ．

(3) $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=f_y=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0,0)$．この場合，$D>0$ なので極値をもたない．

(4) $f(x,y)=xy(1-x-y)$ とすると，

$$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3).$$

$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1)$ のときは，$D>0$ なので極値をもたない．

$(x,y)=(1/3,1/3)$ のときは，$D<0$ かつ $A<0$ より $f(1/3,1/3)=1/27$ は極大値．

**9.** (1) $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$4a^2-b^2-4=0$ より，$a\neq 0$ なので，$F_x(a,b)=8a$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 3a^2-8\lambda a=0 \\ 1-2\lambda b=0 \end{cases}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．第 2 式より $b\neq 0$ なので，$a\neq 0$ とあわせて計算すれば，$a=-\frac{4}{3b}$ となる．これを $4a^2-b^2-4=0$ に代入して計算すると，$(3b^2-4)(3b^2+16)=0$ となり，$b=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ を得る．このとき，$a=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ となる．よって，$(a,b)=\left(\mp\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ であり，$f(a,b)=\mp\frac{2\sqrt{3}}{9}$ となる．

$F(x,y)=0$ より，$y=\pm 2\sqrt{x^2-1}$ なので，$f(x,y(x))$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=3x^2\pm 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=6x\pm 2(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\mp 2x^2(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

となり，$x=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=0$ がわかる．さらに，$x=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=\mp 10\sqrt{3}$ より，$f(x,y)$ は点 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ で，極大値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり，$f(x,y)$ は点 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ で，極小値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる．

(2) $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を $(a,b)$ とする．$ab=2$ より，$F_x(a,b)=b$，$F_y(a,b)=a$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a=\lambda b \\ 12b^3=\lambda a \end{cases}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．$ab=2$ とあわせて計算すれば，$(a,b)=\left(\pm 2(3/2)^{1/6},\pm(2/3)^{1/6}\right)$ であり，$f(a,b)=4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ となる．

$F(x,y)=0$ より，$y=\frac{2}{x}$ なので，$f(x,y(x))$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=2x-192x^{-5}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))=2+960x^{-6}>0$$

となり，$x = \pm 2(3/2)^{1/6}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = 0$ がわかる．さらに，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x)) > 0$ より，$f(x,y)$ は点 $\left(\pm 2(3/2)^{1/6}, \pm(2/3)^{1/6}\right)$ で，極小値 $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ をとる．

(3)　$F(x,y) = x^2y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x,y) = x^4 + y^2$ が極値をとる点 $(a,b)$ の候補を求める．$F(a,b) = 0$ より

$$a^2b^2 = 1 \quad \cdots\cdots①$$

なので，$F_x(a,b) = 2ab^2 \neq 0$ である．ラグランジュの未定係数法より，

$$f_x(a,b) - \lambda F_x(a,b) = 0, \quad f_y(a,b) - \lambda F_y(a,b) = 0$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．これより，

$$4a^3 - 2\lambda ab^2 = 0, \quad 2b - 2\lambda a^2 b = 0.$$

$ab \neq 0$ より，

$$2a^2 - \lambda b^2 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

$$1 - \lambda a^2 = 0. \quad \cdots\cdots③$$

③より $a^2 = \dfrac{1}{\lambda}$．これを②に代入すると $b^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$．これらを①に代入すると $\dfrac{2}{\lambda^3} = 1$．よって，$\lambda = \sqrt[3]{2}$．このとき，

$$a^2 = \frac{1}{\lambda} = 2^{-\frac{1}{3}} \qquad \therefore \quad a = \pm 2^{-\frac{1}{6}}$$

$$b^2 = \frac{2}{\lambda^2} = 2^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore \quad b = \pm 2^{\frac{1}{6}}.$$

よって，

$$(a,b) = (\pm 2^{-\frac{1}{6}}, \pm 2^{\frac{1}{6}}) \text{（複号任意）}, \qquad f(a,b) = a^4 + b^2 = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$$

となる．$F(x,y) = 0$ を $y$ について解けば，$y = \pm\frac{1}{x}$ より，$f(x,y(x)) = x^4 + \frac{1}{x^2}$ の微分は

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = 4x^3 - 2x^{-3}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x)) = 12x^2 + 6x^{-4} > 0$$

となり，$x = \pm 2^{-\frac{1}{6}}$ のとき，$\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = 0$ がわかる．さらに，$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x)) > 0$ より，$f(x,y)$ は点 $(\pm 2^{-\frac{1}{6}}, \pm 2^{\frac{1}{6}})$（複号任意）で極小値 $3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$ をとる．

**10.**　与えられた関数に対して，$D$ の内部 $x^2 + y^2 < 1$ における極値と $x^2 + y^2 = 1$ における極値を調べればよい．

(1)　$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ とおく．$D$ の内部で $f_x = f_y = 0$ となる点 $(a,b)$ は，$(a,b) = (1/2, 0)$．このとき，$D < 0$，$A > 0$ なので，$f(1/2, 0) = -1/4$ は極小値となる．

次に，$x^2 + y^2 = 1$ における極値を調べるために，$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とおき，条件 $F(x,y) = 0$ のもとで，$f(x,y)$ が極値となる点の候補を $(a,b)$ とする．このとき，$a^2 + b^2 = 1$ より，$F_x(a,b) = 2a$，$F_y(a,b) = 2b$ の少なくとも一方は $0$ でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a(1-\lambda) = 1 \\ 2b(2-\lambda) = 0 \end{cases}$$

を満たす定数 $\lambda$ が存在する．$b = 0$ のとき，$a = \pm 1$．$b \neq 0$ のときは，$\lambda = 2$，$a = -1/2$ なので，$b = \pm\sqrt{3}/2$．よって，

$$(a,b) = (1,0),\ (-1,0),\ (-1/2, \sqrt{3}/2),\ (-1/2, -\sqrt{3}/2)$$

が極値をとる点の候補となる．そこで，これらの点が実際に極値になっているかを調べる．

$(a,b)=(1,0)$ のとき，$x=1-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ とおくと，$f(x,y)=\varepsilon(3-\varepsilon)$ となる．よって，$0<\varepsilon<3$ ならば，$f(x,y)>f(a,b)=0$ となる．ゆえに，$f(x,y)$ は点 $(1,0)$ で極小値 $0$ をとる．

$(a,b)=(-1,0)$ のとき，$x=-1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0$ とおくと，$f(x,y)=2-\varepsilon(1-\varepsilon)$ となる．よって，$0<\varepsilon<1$ ならば，$f(x,y)<f(a,b)=2$ となる．ゆえに，$f(x,y)$ は点 $(-1,0)$ で極大値 $2$ をとる．

$(a,b)=(-1/2,\sqrt{3}/2)$ のとき，この点の近くでの $F(x,y)=0$ の陰関数を $y=y_1(x)$ とし，$p(x)=f(x,y_1(x))$ とおく．このとき，$F(x,y_1(x))=0$，すなわち，$x^2+y_1(x)^2-1=0$ を $x$ で 2 回微分すると，

$$\begin{cases} x+y_1(x)y_1'(x)=0 \\ 1+\{y_1'(x)\}^2+y_1(x)y_1''(x)=0 \end{cases}$$

となる．また，$p(x)=x^2+2y_1(x)^2-x=1+y_1(x)^2-x$ なので，

$$\begin{cases} p'(x)=2y_1(x)y_1'(x)-1 \\ p''(x)=2\{y_1'(x)\}^2+2y_1(x)y_1''(x) \end{cases}$$

である．ここで，$y_1(-1/2)=\sqrt{3}/2$ なので，上式より，$y_1'(-1/2)=1/\sqrt{3}$，$y_1''(-1/2)=-8/(3\sqrt{3})$ となり，$p'(-1/2)=0$，$p''(-1/2)=-2<0$ を得る．ゆえに，$p(x)$ は $x=-1/2$ で極大となる．すなわち，$f(x,y)$ は点 $(-1/2,\sqrt{3}/2)$ で極大値 $f(-1/2,\sqrt{3}/2)=9/4$ をとる．$f(x,y)$ が点 $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$ で極大値 $9/4$ をとることも同様にして示せる．

(2)　$f(x,y)=(1-x^2-y^2)xy^2$ とおく．$D$ の内部で $f_x=f_y=0$ となる点 $(a,b)$ は，$(a,b)=(0,\pm1)$，$(1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$，$(-1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$，$(x,0)$ $(-1<x<1$ は任意$)$ である．まず，任意の $-1<x<1$ に対して $f(x,0)=0$ なので，$f(x,y)$ は点 $(a,b)=(x,0)$ では極値をとらない．また，$(a,b)=(0,\pm1)$ の場合も，$D>0$ となり，極値をとらない．次に，点 $(\pm1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ では，$D<0$ となり，$a=1/\sqrt{5}$ ならば $A<0$ で，$a=-1/\sqrt{5}$ ならば $A>0$．ゆえに，$f(x,y)$ は，点 $(1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ で極大値 $f(1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})=4\sqrt{5}/125$ をとり，点 $(-1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ で極小値 $f(-1/\sqrt{5},\pm\sqrt{2}/\sqrt{5})=-4\sqrt{5}/125$ をとる．一方，条件 $x^2+y^2=1$ のもとでは $f(x,y)=(1-x^2-y^2)xy^2=0$ となるので，極値はない．