4章の解答例

4.4　偏微分の応用

問 1　(1)　陰関数の微分法より，$2x-2+4yy'=0$．これを整理して，$y'=\frac{1-x}{2y}$.

(2)　陰関数の微分法より，$2x+2y+2xy'-4yy'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x+y}{x-2y}$

(3)　陰関数の微分法より，$3x^2+3y+3xy'3y^2y'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$

(4)　陰関数の微分法より，$\cosh(x+y)+\cosh(x+y)y'=0$.
これを整理して，$y'=-1$

問 2　(1)　$f(x,y)=2x^2+4y^2$ とすると，$f_x=4x$，$f_y=8y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．$A=f_{xx}(0,0)=4>0$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=8$，$D=-32<0$ より，原点で極小値 0 をもつ．

(2)　$f(x,y)=x^2-3y^2$ とすると，$f_x=2x$，$f_y=-6y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．$A=f_{xx}(0,0)=2$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=-6$，$D=12>0$ より，極値は存在しない．

(3)　$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ とすると，$f_x=3x^2-3y$，$f_y=-3x+3y^2$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),(1,1)$．原点では，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=3$, $C=f_{yy}(0,0)=0$, $D=9>0$．また, 点 $(1,1)$ では, $A=f_{xx}(1,1)=6$, $B=f_{xy}(1,1)=-3$，$C=f_{yy}(1,1)=6$，$D=-27<0$．以上より，点 $(1,1)$ で極小値 -1 をもつ．

(4)　$f(x,y)=x+y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}$ とすると，$f_x=1-\dfrac{4}{x^2}$，$f_y=1-\dfrac{1}{y^2}$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$．点 $(2,1)$ では，$D<0$，$A>0$ なので，$f(2,1)=6$ は極小値．点 $(\pm2,\mp1)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $(-2,-1)$ では，$D<0$，$A<0$ より，$f(-2,-1)=-6$ は極大値．

(5)　$f(x,y)=2x^2+2xy+y^4$ とすると，$f_x=4x+2y$，$f_y=2x+4y^3$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\dfrac{1}{4},\mp\dfrac{1}{2}\right))$．原点では，$D>0$ より，極値をとらない．．点 $\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}$ は極小値.

(6)　$f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-y$ とすると，$f_x=4x^3+4x$，$f_y=3y^2-1$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．点 $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極小値.

(7)　$f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=-2xf$，$f_y=-2yf$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．原点では，$D<0$，$A<0$ より，$f(0,0)=1$ は極大値.

(8)　$f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ とすると, $f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．原点では, $D>0$ より, 極値をとらない．点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では, $D<0$, $A<0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2e}$ は極大値．点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ よ

り，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ は極小値.

問 3　(1)　$ab = 1$ のとき, $F_x(a,b) = b \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法により，

$$\begin{cases} 2a - \lambda b = 0 \\ 2b - \lambda a = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$a(4-\lambda^2) = 0$．$a \neq 0$ なので，$\lambda = \pm 2$．まず，$\lambda = -2$ のとき，$(*)$ より，$a = -b$．ところが，$ab = 1$ なので，$b^2 = -1$ で不適．次に，$\lambda = 2$ のとき，$(*)$ より，$a = b$．また，$ab = 1$ より，$(a,b) = (\pm 1, \pm 1)$．この場合，$f(a,b) = 4$ は極値の候補となる．条件 $xy = 1$ の下では，$f(x,y) = f(x, 1/x) = 2(x^2 + 1/x^2) \geq 4$ だから，4 が最小値.

(2)　$a + b = 1$ のとき，$F_x(a,b) = 1 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a - \lambda = 0 \\ 4b - \lambda = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$a = 2b$．$a + b = 1$ より，$b = 1/3, \lambda = 4/3$．よって，$a = 2/3$ なので，$f(a,b) = 2/3$ が極値の候補となる．条件 $x+y = 1$ の下では, $f(x,y) = f(x, 1-x) \geq 2/3$ だから，$2/3$ が最小値.

(3)　$a^4b^2 = 1$ のとき，$F_x(a,b) = 4a^3b^2 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a - 4\lambda a^3 b^2 = 0 \\ 2b - 2\lambda a^4 b = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$\lambda = 1/(2a^2b^2)$ かつ $\lambda = 1/a^4$ なので，$a^2 = 2b^2$．$a^4b^2 = 1$ より，$(a,b) = (\pm\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[3]{2}), (\pm\sqrt[6]{2}, \mp 1/\sqrt[3]{2})$．よって，$f(a,b) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ が極値の候補となる． 条件 $x^4y^2 = 1$ の下では，$f(x,y)$ は連続かつ $f(x,y) = x^2 + 1/x^4 > 0$ で，右辺は $x \to \pm\infty$，$x \to \pm 0$ のとき $+\infty$ 発散するので，$(0,\infty)$ と $(-\infty, 0)$ に最小値をもつ．よって，$\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ が最小値.

(4)　$2a + b = 1$ のとき，$F_x(a,b) = 2 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 4a^3 - 2\lambda = 0 \\ 4b^3 - \lambda = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ より，$\lambda = 2a^3$ かつ $\lambda = 4b^3$ なので，$a = \sqrt[3]{2}b$．$2a+b = 1$ より，$a = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+2\sqrt[3]{2}}, b = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$．よって，$f(a,b) = \dfrac{1}{(1+2\sqrt[3]{2})^3}$ が極値の候補となる． 条件 $2x + y = 1$ の下では，$f(x,y) = 17x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$ は 4 次関数で，右辺は $x \to \pm\infty$ のとき $+\infty$ に発散するので最小値をもつ．よって，$\dfrac{1}{(1+2\sqrt[3]{2})^3}$ が最小値.

問 4　　(1)　$4a^2 + b^2 = 1$ のとき，$F_x(a,b) = 8a$，$F_y(a,b) = 2b$ の少なくとも一方は

0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b - 8a\lambda = 0 \\ a - 2b\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b(16\lambda^2 - 1) = 0 \\ 2b\lambda = a \end{cases} \tag{$*$}$$

$b = 0$ とすると，$(*)$ より $a = 0$．ところが，$1 = 4a^2 + b^2 = 0$ となるので不適．よって，$b \neq 0$ としてよい．この場合，$(*)$ より，$\lambda = \pm 1/4$．

$\lambda = 1/4$ のとき，$(*)$ より，$b = 2a$．$4a^2 + b^2 = 1$ より，$(a, b) = \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a, b) = 1/4$．

$\lambda = -1/4$ のとき，$(*)$ より，$b = -2a$．$4a^2 + b^2 = 1$ より，$(a, b) = \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a, b) = -1/4$．

$F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$1/4$ は最大値，$-1/4$ は最小値．

(2)　$a^2 + b^2 = 1$ のとき，$F_x(a, b) = 2a$，$F_y(a, b) = 2b$ の少なくとも一方は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1 - 2a\lambda = 0 \\ 1 - 2b\lambda = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の差をとると，

$$\lambda(a - b) = 0.$$

$\lambda = 0$ とすると，$(*)$ より $0 = 1 - 2a\lambda = 1$ となるので不適．よって，$\lambda \neq 0$ としてよい．この場合，$a = b$．$a^2 + b^2 = 1$ より，$2a^2 = 1$ なので，$(a, b) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a, b) = \pm\sqrt{2}$．

$F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は楕円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$\sqrt{2}$ は最大値，$-\sqrt{2}$ は最小値．

(3)　$a^2 + ab + b^2 = 1$ のとき，$F_x(a, b) = 2a + b$，$F_y(a, b) = a + 2b$ がともに 0 になるのは，$(a, b) = (0, 0)$ のときである．この場合は，$1 = a^2 + ab + b^2 = 0$ となって不適．よって，$F_x(a, b) = 2a + b \neq 0$ または $F_y(a, b) = a + 2b \neq 0$ としてよい．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b - \lambda(2a + b) = 0 \\ a - \lambda(a + 2b) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の差をとると，

$$b(1 - 2\lambda - 3\lambda^2) = 0.$$

$b = 0$ とすると，$a^2 + ab + b^2 = 1$ より，$a = \pm 1$．$(*)$ の第 1 式より，$0 = b - \lambda(2a + b) = \mp 2\lambda$．$\therefore \lambda = 0$．ところが，第 2 式より，$0 = a - \lambda(a + 2b) = a = \pm 1$ となるので，不適．よって，$b \neq 0$ かつ $1 - 2\lambda - 3\lambda^2 = 0$．$\therefore \lambda = -1, 1/3$．

$\lambda = -1$ のとき，$(*)$ より，$b = -a$．$a^2 + ab + b^2 = 1$ より，$(a, b) = (\pm 1, \mp 1)$．よって，$f(a, b) = -1$．

$\lambda = 1/3$ のとき，$(*)$ より，$a = b$．$a^2+ab+b^2 = 1$ より，$(a,b) = \left(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}\right)$．よって，$f(a,b) = 1/3$．

$F(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は楕円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$\sqrt{2}$ は最大値，$-\sqrt{2}$ は最小値．以上より，最大値 $1/3$，最小値 -1．

(4)　$a^3 - 3ab + b^3 = 0$ のとき，$F_x(a,b) = 3a^2 - 3b$，$F_y(a,b) = -3a + 3b^2$ がともに 0 になるのは，$(a,b) = (0,0), (1,1)$ のときである．$(a,b) = (1,1)$ の場合は，$1 = a^3 - 3ab + b^3 = 0$ となって不適．また，$(a,b) = (0,0)$ の場合は，$f(a,b) = 0$．

$a^3 - 3ab + b^3 = 0$ かつ $(a,b) \neq (0,0)$ の場合，$F_x(a,b) \neq 0$ または $F_y(a,b) \neq 0$ としてよい．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1 - \lambda(3a^2 - 3b) = 0 \\ 1 - \lambda(3b^2 - 3a) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式を a 倍したものと，第 2 式を b 倍したものとの差をとると，

$$(a-b)\{3\lambda(a^2+ab+b^2) - 1\} = 0.$$

$3\lambda(a^2+ab+b^2) - 1 = 0$ のとき，$(*)$ より，

$$1 = 3\lambda a^2 + 3\lambda ab + 3\lambda b^2 = (3\lambda b + 1) + 3\lambda ab + (3\lambda a + 1).$$

これを整理して, $3\lambda(a+ab+b) = -1$．$a, b \geq 0$ なので, $\lambda < 0$ ところが, $3\lambda(a^2+ab+b^2) = 1$ は，$\lambda > 0$ を意味するので矛盾.

$3\lambda(a^2+ab+b^2) - 1 \neq 0$ なので，$a = b$．このとき，$a^3 - 3ab + b^3 = 0$ より，$(a,b) = (3/2, 3/2)$．よって，$f(a,b) = 3$．

$F(x,y) = 0$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は閉曲線なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，3 は最大値，0 は最小値．