4.3 高次偏導関数

問 1 (1) $f(x,y)=(2x+y)^2$ とすると，$f_x=4(2x+y)$，$f_y=2(2x+y)$，$f_{xx}=8$，$f_{xy}=f_{yx}=4$，$f_{yy}=2$.

(2) $f(x,y)=\cosh(x+y)$ とすると，$f_x=f_y=\sinh(x+y)$．これを微分して，$f_{xx}=f_{xy}=f_{yx}=f_{yy}=\cosh(x+y)$.

(3) $f(x,y)=e^x\log y^2$ とすると，$f_x=f$ なので，$f_{xx}=f_x=f$，$f_{xy}=f_y$．また，$f_y=\dfrac{2e^x}{y}$ なので，$f_{yx}=f_y=\dfrac{2e^x}{y}$，$f_{yy}=-\dfrac{2e^x}{y^2}$.

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$．これらを微分して，$f_{xx}=\frac{2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$，$f_{xy}=f_{yx}=-\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$，$f_{yy}=\frac{2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

(5) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると, $f_x=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$．これらを微分して, $f_{xx}=-\dfrac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $f_{yy}=-\dfrac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

(6) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$．これらを微分して，$f_{xy}=f_{yx}=-\dfrac{2y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}$，$f_{xx}=f_{yy}=\dfrac{2x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}$

問 2 (1) 原点では,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

原点以外では，$f(x,y)=\dfrac{xy(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}$ なので，$f(x,y)$ は偏微分可能で,

$$f_x=\frac{y(x^4+2^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y=\frac{x(x^4+5x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

よって，f_x，f_y は原点以外では連続である．極座標表示すると，$|f_x|\le 4r$，$|f_y|\le 8r$ となり，右辺は θ に依らない関数で，$r\to 0$ のとき，0 に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0=f_x(0,0)$，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=0=f_y(0,0)$．以上から，$f$ はすべての点で偏微分可能で，f_x，f_y はすべての点で連続であるのである．したがって，f は C^1 級である.

(2) 原点以外では，f_x は偏微分可能で，f_{xy} は直線 $x=0$ 上で $f_{xy}(0,y)=10$，直線 $y=0$ 上で $f_{xy}(x,0)=1$ である．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)$ が存在しない．したがって，f_{xy} は原点で連続でない.

問 3 (1) $f(x,y)=x^2+y^3$ とすると，$f_{xy}=0$ は定数関数なので，連続.

(2) $f(x,y)=y^2e^{x^2}$ とすると，$f_{xy}=4xye^{x^2}$ なので，連続.

(3) $f(x,y)=\sin^{-1}xy$ とすると，$f_{xy}=\frac{1}{\{1-(xy)^2\}^{3/2}}$．よって、$|xy|<1$ となる点 (x,y) で連続.

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とすると，$f_{xy}=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ なので，原点を除いて連続.

(5)　原点以外では, $f(x,y)=\exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ なので, $f_{xy}=\dfrac{xy(1-3\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^3}f$ は連続で，極座標表示すると $|f_{xy}|\le(r^{-4}+3r^{-3})e^{-1/r}$ となり，右辺は θ によらない関数で，$r\to 0$ のとき 0 に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)=0$．一方，原点では，$f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-1}e^{-1/|h|}=0$，$f_{xy}(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=0$ なので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)=f_{xy}(0,0)$．よって，$f_{xy}$ は連続.

問 4　$F(x,t)=f(x\pm at)$ とおくと，$\dfrac{\partial^2F}{\partial t^2}=a^2f''(x\pm at)$，$\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}=f''(x\pm at)$．よって，

$$\frac{\partial^2z}{\partial t^2}=a^2(f''(x+at)+f''(x-at))=a^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}.$$

問 5　　(1)　$f(x,y)=2x-y+1$ とすると，$f_{xx}=0$，$f_{yy}=0$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(2)　$f(x,y)=x^2-y^2$ とすると，$f_{xx}=2$，$f_{yy}=-2$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(3)　$f(x,y)=x^3-3xy^2$ とすると，$f_{xx}=6x$，$f_{yy}=-6x$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(4)　$f(x,y)=e^x\cos y$ とすると，$f_{xx}=f$，$f_{yy}=-f$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(5)　$f(x,y)=\cosh x\sin y$ とすると，$f_{xx}=f$，$f_{yy}=-f$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(6)　$f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ とすると, $f_{xx}=\dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}=-f_{yy}=$なので, $f_{xx}+f_{yy}=0$.

(7)　$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ とすると，$f_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2)}=-f_{yy}$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(8)　$f(x,y)=\sin^{-1}u(x,y)$，$u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{u_x}{\sqrt{1-u^2}}$，$f_{xx}=\dfrac{u_{xx}(1-u^2)+uu_x^2}{(1-u^2)^{3/2}}$．ここで，$u_{xx}(1-u^2)+uu_x^2=\dfrac{4xy(x^2-y^2)^3}{(x^2+y^2)^5}$ を $g(x,y)$ とおくと，$g(y,x)=-g(x,y)$ となる．よって，$f(y,x)=f(x,y)$，$u(y,x)=u(x,y)$ より，$f_yy(x,y)=f_{xx}(y,x)=-f_{xx}(x,y)$．したがって，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

(9)　$f(x,y)=\tan^{-1}u(x,y)$，$u(x,y)=\frac{y}{x}$ とすると，$f_x=\dfrac{u_x}{1+u^2}$，$f_y=\dfrac{u_y}{1+u^2}$．また，$u_x=-y/x^2$，$u_{xx}=2y/x^3$ より，$f_{xx}=\dfrac{2y}{x^3(1+u^2)^2}$．$u_y=1/x$，$u_{yy}=0$ より，$f_{yy}=\dfrac{-2y}{x^3(1+u^2)^2}=-f_{xx}$ なので，$f_{xx}+f_{yy}=0$.

問 6　(1)　$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_{xx}(x,y)=\dfrac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$, $f_{yy}(x,y)=\dfrac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$, $f_{xy}(x,y)=\dfrac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$ なので,

$$\begin{aligned}f(x,y)&=1+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2f_{yy}(\theta x,\theta y))\\&=1-\frac{x^2+y^2}{2\{1-\theta^2(x^2+y^2)\}^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

(2)　$f(x,y)=\sin(x+y)$ とすると，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$，$f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=$

$f_{xy}(x,y) = -\sin(x+y)$ なので，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= (x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 \sin(\theta(x+y)). \end{aligned}$$

(3)　$f(x,y) = \cosh(x+y)$ とすると，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，$f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = \cosh(x+y)$ なので，$f(x,y) = 1 + \dfrac{1}{2}(x+y)^2 \cosh(\theta(x+y))$.

(4)　$f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$ とすると，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{2(y^2-x^2-1)}{(1-x^2-y^2)^2}$，$f_{xy}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$，$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2(x^2-y^2-1)}{(1-x^2-y^2)^2}$ なので，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= -\frac{(x^2+y^2)\{1+\theta^2(x^2+y^2)\}}{\{1-\theta^2(x^2+y^2)\}^2}. \end{aligned}$$

(5)　原点以外では，$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ となるので，合成関数の微分法を用いて計算する．このとき，$f(y,x) = f(x,y)$ より $f_y y(x,y) = f_{xx}(y,x)$ となることも利用するとよい．一方，原点では $f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$．同様に，$f_y(0,0) = 0$ となる．以上から，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)) \\ &= \frac{2-3\theta^2(x^2+y^2)}{\theta^6(x^2+y^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2(x^2+y^2)}\right). \end{aligned}$$

問 7　テイラーの定理より，

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a,b) &+ h f_x(a,b) + k f_y(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)\} \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(h,k)}{h^2+k^2} = \frac{1}{2}\Big\{ &\frac{h^2}{h^2+k^2}(f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b)) \\ &+ \frac{2hk}{h^2+k^2}(f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xy}(a,b)) \\ &+ \frac{k^2}{h^2+k^2}(f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))\Big\}. \end{aligned}$$

ここで，$\left|\dfrac{h^2}{h^2+k^2}\right|, \left|\dfrac{2hk}{h^2+k^2}\right|, \left|\dfrac{k^2}{h^2+k^2}\right|$ はすべて 1 以下なので，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varepsilon(h,k)}{h^2+k^2}\right| \leq \frac{1}{2}\Big\{&|(f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))| \\ &+ |(f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xy}(a,b))| \\ &+ |(f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) - f_{xx}(a,b))|\Big\}.\end{aligned}$$

仮定より，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} は連続なので，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{xx}(a,b)$，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{xy}(a,b)$，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) = f_{yy}(a,b)$ だから，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{(h^2+k^2)} = 0$ が言える．

4.4 偏微分の応用

問 1 (1) 陰関数の微分法より，$2x-2+4yy'=0$．これを整理して，$y'=\frac{1-x}{2y}$．

(2) 陰関数の微分法より，$2x+2y+2xy'-4yy'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x+y}{x-2y}$

(3) 陰関数の微分法より，$3x^2+3y+3xy'3y^2y'=0$.
これを整理して，$y'=-\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$

(4) 陰関数の微分法より，$\cosh(x+y)+\cosh(x+y)y'=0$.
これを整理して，$y'=-1$

問 2 (1) $f(x,y)=2x^2+4y^2$ とすると，$f_x=4x$，$f_y=8y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．$A=f_{xx}(0,0)=4>0$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=8$，$D=-32<0$ より，原点で極小値 0 をもつ.

(2) $f(x,y)=x^2-3y^2$ とすると，$f_x=2x$，$f_y=-6y$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．$A=f_{xx}(0,0)=2$，$B=f_{xy}(0,0)=0$，$C=f_{yy}(0,0)=-6$，$D=12>0$ より，極値は存在しない.

(3) $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ とすると，$f_x=3x^2+3y$，$f_y=3x+3y^2$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),(-1,1)$．原点では，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=3$，$C=f_{yy}(0,0)=0$，$D=9>0$．また，点 $(-1,1)$ では，$A=f_{xx}(-1,1)=6$，$B=f_{xy}(-1,1)=0$，$C=f_{yy}(-1,1)=-6$，$D=45>0$．以上より，極値は存在しない.

(4) $f(x,y)=x+y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}$ とすると，$f_x=1-\dfrac{4}{x^2}$，$f_y=1-\dfrac{1}{y^2}$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$．点 $(2,1)$ では，$D<0$，$A>0$ なので，$f(2,1)=6$ は極小値．点 $(\pm2,\mp1)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $(-2,-1)$ では，$D<0$，$A<0$ より，$f(-2,-1)=-6$ は極大値.

(5) $f(x,y)=2x^2+2xy+y^4$ とすると，$f_x=4x+2y$，$f_y=2x+4y^3$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\dfrac{1}{4},\mp\dfrac{1}{2}\right))$．原点では，$D>0$ より，極値をとらない．．点 $\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{4},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}$ は極小値.

(6) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-y$ とすると，$f_x=4x^3+4x$，$f_y=3y^2-1$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．点 $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極小値.

(7) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=-2xf$，$f_y=-2yf$ なので，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．原点では，$D<0$，$A<0$ より，$f(0,0)=1$ は極大値.

(8) $f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．原点では，$D>0$ より，極値をとらない．点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では，$D<0$，$A<0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2e}$ は極大値．点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では，$D<0$，$A>0$ より，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$ は極小値.

問 3 (1) $ab=1$ のとき，$F_x(a,b)=b\neq0$．よって，ラグランジュの未定乗数法に

より，

$$\begin{cases} 2a - \lambda b = 0 \\ 2b - \lambda a = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ より，$a(4-\lambda^2)=0$．$a \neq 0$ なので，$\lambda = \pm 2$．まず，$\lambda = -2$ のとき，$(*)$ より，$a=-b$．ところが，$ab=1$ なので，$b^2=-1$ で不適．次に，$\lambda=2$ のとき，$(*)$ より，$a=b$．また，$ab=1$ より，$(a,b)=(\pm 1, \pm 1)$．この場合，$f(a,b)=4$ は極値の候補となる．条件 $xy=1$ の下では，$f(x,y)=f(x,1/x)=2(x^2+1/x^2) \geq 4$ だから，4 が最小値.

(2)　$a+b=1$ のとき，$F_x(a,b)=1 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a - \lambda = 0 \\ 4b - \lambda = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ より，$a=2b$．$a+b=1$ より，$b=1/3, \lambda=4/3$．よって，$a=2/3$ なので，$f(a,b)=2/3$ が極値の候補となる．条件 $x+y=1$ の下では, $f(x,y)=f(x,1-x) \geq 2/3$ だから，$2/3$ が最小値.

(3)　$a^4b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=4a^3b^2 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a - 4\lambda a^3 b^2 = 0 \\ 2b - 2\lambda a^4 b = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ より，$\lambda = 1/(2a^2b^2)$ かつ $\lambda = 1/a^4$ なので，$a^2=2b^2$．$a^4b^2=1$ より，$(a,b)=(\pm\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[3]{2}), (\pm\sqrt[6]{2}, \mp 1/\sqrt[3]{2})$．よって，$f(a,b)=\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}$ が極値の候補となる．条件 $x^4y^2=1$ の下では，$f(x,y)$ は連続かつ $f(x,y)=x^2+1/x^4>0$ で，右辺は $x \to \pm\infty$，$x \to \pm 0$ のとき $+\infty$ 発散するので，$(0,\infty)$ と $(-\infty,0)$ に最小値をもつ．よって，$\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}$ が最小値.

(4)　$2a+b=1$ のとき，$F_x(a,b)=2 \neq 0$．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 4a^3 - 2\lambda = 0 \\ 4b^3 - \lambda = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ より，$\lambda = 2a^3$ かつ $\lambda = 4b^3$ なので，$a=\sqrt[3]{2}b$．$2a+b=1$ より，$a=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+2\sqrt[3]{2}}, b=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$．よって，$f(a,b)=\dfrac{\sqrt[3]{2^4}+1}{(1+2\sqrt[3]{2})^4}$ が極値の候補となる．条件 $2x+y=1$ の下では，$f(x,y)=17x^4-32x^3+24x^2-8x+1$ は 4 次関数で，右辺は $x \to \pm\infty$ のとき $+\infty$ ぶ発散するので最小値をもつ．よって，$\dfrac{\sqrt[3]{2^4}+1}{(1+2\sqrt[3]{2})^4}$ が最小値.

問 4　　(1)　$4a^2+b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=8a$，$F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b - 8a\lambda = 0 \\ a - 2b\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b(16\lambda^2 - 1) = 0 \\ 2b\lambda = a \end{cases} \qquad (*)$$

$b=0$ とすると，$(*)$ より $a=0$．ところが，$1=4a^2+b^2=0$ となるので不適．よって，$b\neq 0$ としてよい．この場合，$(*)$ より，$\lambda=\pm 1/4$.

$\lambda=1/4$ のとき，$(*)$ より，$b=2a$．$4a^2+b^2=1$ より，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，$f(a,b)=1/4$.

$\lambda=-1/4$ のとき，$(*)$ より，$b=-2a$．$4a^2+b^2=1$ より，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. よって，$f(a,b)=-1/4$.

$F(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$1/4$ は最大値，$-1/4$ は最小値.

(2)　$a^2+b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=2a$，$F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1-2a\lambda=0 \\ 1-2b\lambda=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の差をとると，

$$\lambda(a-b)=0.$$

$\lambda=0$ とすると，$(*)$ より $0=1-2a\lambda=1$ となるので不適．よって，$\lambda\neq 0$ としてよい．この場合，$a=b$．$a^2+b^2=1$ より，$2a^2=1$ なので，$(a,b)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. よって，$f(a,b)=\pm\sqrt{2}$.

$F(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は楕円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$\sqrt{2}$ は最大値，$-\sqrt{2}$ は最小値.

(3)　$a^2+ab+b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=2a+b$，$F_y(a,b)=a+2b$ がともに 0 になるのは，$(a,b)=(0,0)$ のときである．この場合は，$1=a^2+ab+b^2=0$ となって不適．よって，$F_x(a,b)=2a+b\neq 0$ または $F_y(a,b)=a+2b\neq 0$ としてよい．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} b-\lambda(2a+b)=0 \\ a-\lambda(a+2b)=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の差をとると，

$$b(1-2\lambda-3\lambda^2)=0.$$

$b=0$ とすると，$a^2+ab+b^2=1$ より，$a=\pm 1$．$(*)$ の第 1 式より，$0=b-\lambda(2a+b)=\mp 2\lambda$．$\therefore \lambda=0$．ところが，第 2 式より，$0=a-\lambda(a+2b)=a=\pm 1$ となるので，不適．よって，$b\neq 0$ かつ $1-2\lambda-3\lambda^2=0$．$\therefore \lambda=-1, 1/3$.

$\lambda=-1$ のとき，$(*)$ より，$b=-a$．$a^2+ab+b^2=1$ より，$(a,b)=(\pm 1,\mp 1)$．よって，$f(a,b)=-1$.

$\lambda=1/3$ のとき，$(*)$ より，$a=b$．$a^2+ab+b^2=1$ より，$(a,b)=\left(\pm 1/\sqrt{3},\pm 1/\sqrt{3}\right)$. よって，$f(a,b)=1/3$.

$F(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は楕円なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，$\sqrt{2}$ は最大値，$-\sqrt{2}$ は最小値．以上より，最大値 $1/3$，最小値 -1.

(4)　$a^3-3ab+b^3=0$ のとき，$F_x(a,b)=3a^2-3b$，$F_y(a,b)=-3a+3b^2$ が

ともに 0 になるのは，$(a,b)=(0,0),(1,1)$ のときである．$(a,b)=(1,1)$ の場合は，$1=a^3-3ab+b^3=0$ となって不適．また，$(a,b)=(0,0)$ の場合は，$f(a,b)=0$.

$a^3-3ab+b^3=0$ かつ $(a,b)\neq(0,0)$ の場合，$F_x(a,b)\neq 0$ または $F_y(a,b)\neq 0$ としてよい．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 1-\lambda(3a^2-3b)=0 \\ 1-\lambda(3b^2-3a)=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ の第 1 式を a 倍したものと，第 2 式を b 倍したものとの差をとると，

$$(a-b)\{3\lambda(a^2+ab+b^2)-1\}=0.$$

$3\lambda(a^2+ab+b^2)-1=0$ のとき，$(*)$ より，

$$1=3\lambda a^2+3\lambda ab+3\lambda b^2=(3\lambda b+1)+3\lambda ab+(3\lambda a+1).$$

これを整理して, $3\lambda(a+ab+b)=-1$．$a,b\geq 0$ なので, $\lambda<0$ ところが, $3\lambda(a^2+ab+b^2)=1$ は，$\lambda>0$ を意味するので矛盾.

$3\lambda(a^2+ab+b^2)-1\neq 0$ なので，$a=b$．このとき，$a^3-3ab+b^3=0$ より，$(a,b)=(3/2,3/2)$．よって，$f(a,b)=3$.

$F(x,y)=0$ $(x\geqq 0, y\geqq 0)$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は閉曲線なので，極値で最大値・最小値をとる．よって，3 は最大値，0 は最小値.

4 章の章末問題

1.　(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(3x^2-\log xy)=3.$

(2)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=0.$

(3)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y}{x^3-y^3)}\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x^2+xy+y^2)}=\frac{1}{3}.$

(4)　$y=mx$ とおくと，$\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1-m}{1+m}$ なので極限なし.

(5)　$y=mx$ とおくと，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{m}$ なので極限なし.

(6)　4.3 節の問 7 を $f(x,y)=2-\cos x-\cos y$，$(a,b)=(0,0)$，$(h,k)=(x,y)$ として応用すると，

$$2-\cos x-\cos y=\frac{(x^2+y^2)}{2}+\varepsilon(x,y)$$

と表すとき，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}=0$ が成り立つ．ゆえに，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2-\cos x-\cos y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\frac{(x^2+y^2)}{2}+\varepsilon(x,y)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2}{1+2\frac{\varepsilon(x,y)}{x^2+y^2}}=2.$$

2.　(1)　$y=x^2$ とおくと，$f(x,y)=\frac{1}{2}$ なので，原点で不連続.

(2)　極座標表示すると，

$$|f(x,y)|=\left|\frac{r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\right|\leqq 2r^2$$

なので，原点で連続.

(3)　$(x,y)=(t\cos t,t\sin t)$ 上では，$t\to 0$ のとき，$f(x,y)\to 1$ となるので，原点で不連続.

3.　与えられた関数を $f(x,y)$ とする.

(1)　直接計算から，$f_x=-4xf$, $f_y=-6yf$, $f_{xx}=4(4x^2-1)f$, $f_{yy}=6(6y^2-1)f$ を得る．また，$f_{xy}=24xyf$ は連続なので, シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=24xyf$.

(2)　$u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}$ とすると，$f_x=-\dfrac{x}{u}$, $f_y=-\dfrac{y}{u}$, $f_{xx}=-\dfrac{\{y^2+(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}}{u^3}$, $f_{yy}=-\dfrac{\{x^2+(y^2-x^2)(x^2+y^2)\}}{u^3}$ を得る．また, $f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$ は連続なので, シュワルツの定理より, $f_{yx}=f_{xy}=\dfrac{xy(1-2x^2-2y^2)}{u^3}$.

(3)　$u(x,y)=1+x^3+y^2$ とすると，$f_x=\dfrac{3x^2}{u}$, $f_y=2\dfrac{y}{u}$, $f_{xx}=\dfrac{3x(2+2y^2-x^3)}{u^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2(1+x^3-y^2)}{u^2}$ を得る．また，$f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx}=f_{xy}=-\dfrac{6x^2y}{u^2}$.

(4)　$u(x,y)=1+\cos x+\cos y$ とすると, $f_x=\dfrac{\sin x}{u^2}$, $f_y=\dfrac{\sin y}{u^2}$, $f_{xx}=\dfrac{1+\cos x+\cos x\cos y+}{u^3}$

$f_{yy} = \dfrac{1+\cos y + \cos x \cos y + \sin^2 y}{u^3}$ を得る．また，$f_{xy} = 2\dfrac{\sin x \sin y}{u^3}$ は連続なので，シュワルツの定理より，$f_{yx} = f_{xy} = 2\dfrac{\sin x \sin y}{u^3}$.

(5)　直接計算より, $f_x = \cosh x \cosh y$, $f_y = \sinh x \sinh y$, $f_{xy} = f_{yx} = \cosh x \sinh y$, $f_{xx} = f_{yy} = f$.

4.　与えられた関数 z に対して，z_x，z_y を求め，$dz = z_x dx + z_y = dy$ とすればよい．

(1)　$dz = (4xy - 3y^2)dx + (2x^2 - 6xy)dy$　　(2)　$dz = \dfrac{2(xdx + ydy)}{x^2+y^2}$

(3)　$dz = -\dfrac{2xdx + 3ydy}{(2x^2+3y^2)^{3/2}}$　　(4)　$dz = 2\exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$

5.　$f(x,y) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{4at}\right)$ とおくと，$u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}f$ かつ $f_t = \dfrac{x^2}{4at^2}f$ なので，

$$u_t = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4at^{5/2}}\right)f.$$

また，$f_x = -\dfrac{x}{2at}f$ なので，

$$u_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}}f_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2at} + \frac{x^2}{4a^2t^2}\right)f.$$

$$\therefore au_x x = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4at^{5/2}}\right)f = u_t.$$

6.　(1)　$f(x,y) = \cos x \sin y$ とすると，$f(0,0) = 0$，$f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 1$，$f_{xx} = -\cos x \sin y$，$f_{xy} = -\sin x \cos y$，$f_{yy} = -\cos x \sin y$ なので，

$$f(x,y) = y - \frac{1}{2}(\cos\theta x)(\sin\theta y)(x^2+y^2) - xy(\sin\theta x)(\cos\theta y)$$

(2)　$f(x,y) = \cosh x \sinh y$ とすると，$f(0,0) = 0$，$f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 1$，$f_{xx} = \cosh x \sinh y$，$f_{xy} = \sinh x \cosh y$，$f_{yy} = \cosh x \sinh y$ なので，

$$f(x,y) = y + \frac{1}{2}(\cosh\theta x)(\sinh\theta y)(x^2+y^2) + xy(\sinh\theta x)(\cosh\theta y).$$

(3)　$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$ とすると，$f(0,0) = 0$，$f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 0$，$f_{xx} = \dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$，$f_{xy} = -\dfrac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$，$f_{yy} = \dfrac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$ なので，

$$f(x,y) = x^2+y^2 - \theta^2(x^2+y^2)^2.$$

(4)　$f(x,y) = e^{x+y}$ とすると，$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = f$ なので，

$$f(x,y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 e^{\theta(x+y)}$$

7.　$x_r = \cos\theta$，$y_r = \sin\theta$ より，$f_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$．$x_\theta = -r\sin\theta$，$y_\theta = r\cos\theta$ より，$\frac{f_\theta}{r} = -\sin\theta f_x + \cos\theta f_y$．よって，

$$
\begin{array}{rcl}
(f_r)^2 & = & \cos^2\theta(f_x)^2 + 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \sin^2\theta(f_y)^2 \\
+ \quad \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & \sin^2\theta(f_x)^2 - 2\sin\theta\cos\theta f_x f_y + \cos^2\theta(f_y)^2 \\
\hline
(f_r)^2 + \dfrac{(f_\theta)^2}{r^2} & = & (f_x)^2 + (f_y)^2
\end{array}
$$

8.　(1)　与式の両辺を x について微分すると，

$$2x + 3y + (3x + 2y - 2)y' = 0. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = \frac{-2x - 3y}{3x + 2y - 2}.$$

$(*)$ を x について微分すると，

$$y'' = \frac{-2(1 + 3y' + (y')^2)}{3x + 2y - 2}.$$

$x = a$ で極値 $y = b$ をもつとすると，与式より

$$a^2 + 3ab + b^2 - 2b = 0.$$

また，$x = a$ における微分係数 $y'(a)$ が 0 になるので，

$$-2a - 3b = 0.$$

この 2 式から，$(a, b) = (0, 0), \left(-\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$．一方，$y'(a) = 0$ より，$y''(a) = \dfrac{-2}{3a + 2b - 2}$.
　よって，$(a, b) = (0, 0)$ のとき，$y''(a) = 1 > 0$ なので，$b = 0$ は極小値．また，$(a, b) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ のとき，$y''(a) = \dfrac{1}{3} > 0$ なので，$b = \frac{1}{3}$ は極小値.

　(2)　与式の両辺を x について微分すると，

$$3x^2 + 4x = 2yy'. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = \frac{3x^2 + 4x}{2y}.$$

よって，$y' = 0$ のとき，$x = 0, -4/3$．また，$(*)$ を x について微分して，$y' = 0$ すると，

$$y'' = \frac{6x + 4}{2y}.$$

$x = 0$ のときは，与式から $y = 0$ となり，点 $(x, y) = (0, 0)$ 付近では陰関数がただ一つに定まらない．一方，$x = -4/3$ のときは，$y = \pm 4\sqrt{6}/9$ かつ $y''(\pm 4\sqrt{6}/9) = \mp 3\sqrt{6}/2$. よって，$4\sqrt{6}/9$ は極大値で，$-4\sqrt{6}/9$ は極小値.

　(3)　与式の両辺を x について微分すると，

$$x^2 - 2y + (-2x + y^2)y' = 0. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y' = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}.$$

よって，$y' = 0$ のとき，$x = 0, 2\sqrt[3]{4}$．また，$(*)$ を x について微分して $y' = 0$ すると，

$$y'' = \frac{2x}{2x - y^2}.$$

$x=0$ のときは，与式から $y=0$ となり，点 $(x,y)=(0,0)$ 付近では陰関数がただ一つに定まらない．一方，$x=2\sqrt[3]{4}$ のときは，$y=4\sqrt[3]{2}$ かつ $y''(2\sqrt[3]{4})=-1/3<0$．よって，$4\sqrt[3]{2}$ は極大値.
(4)　与式の両辺を x について微分すると，

$$2x+4y^3y'=0. \tag{$*$}$$

y' について解くと，

$$y'=\frac{-x}{2y^3}.$$

よって，$y'=0$ のとき，$x=0$．$(*)$ を x について微分すると，

$$y''=-\frac{1}{2y^3}.$$

よって，$x=0$ のときは，与式から $y=\pm\sqrt[4]{2}$ かつ $y''(\pm\sqrt[4]{2})=\mp1/(2\sqrt[4]{8})$．よって，$\sqrt[4]{2}$ は極大値，$-\sqrt[4]{2}$ は極小値.

9.　(1)　$f(x,y)=x^2+y^3-3y$ とすると，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,\pm1)$．$(x,y)=(0,-1)$ のときは，$D>0$ なので極値をもたない．$(x,y)=(0,1)$ のときは，$D<0$ かつ $A>0$ より極小値 $f(0,1)=-2$ をもつ.

(2)　$f(x,y)=\cosh(x^2+y^2)$ とすると，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．この場合，$D=0$ となるので，定理 11 は適用できない．しかし，$r=x^2+y^2$ とおくと，$r\geqq0$ かつ $r=0 \iff (x,y)=(0,0)$．また，$r>0$ のとき，$\cosh r>\cosh 0=1$．ゆえに，$(x,y)\neq(0,0)$ ならば $f(x,y)>f(0,0)=1$．すなわち，f は原点において極小値 1 をもつ.

(3)　$f(x,y)=(x^2-y^2)e^{x^2+y^2}$ とすると，$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0)$．この場合，$D>0$ なので極値をもたない.

(4)　$f(x,y)=xy(1-x-y)$ とすると，

$$f_x=f_y=0 \iff (x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3).$$

$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1)$ のときは，$D>0$ なので極値をもたない.
$(x,y)=(1/3,1/3)$ のときは，$D<0$ かつ $A<0$ より $f(1/3,1/3)=1/27$ は極大値.

10. D の内部 $x^2+y^2<1$ の極大値・極小値と D の境界 $x^2+y^2=1$ における最大値・最小値の中から，D における最大値・最小値を選べばよい．　(1)　$f(x,y)=x^2+2y^2-x$ とすると，D の内部で $f_x=f_y=0$ となる点は，$(x,y)=(1/2,0)$．このとき，$D<0$，$A>0$ なので，$f(1/2,0)=-1/4$ は極小値.

境界における最大値・最小値を求めるために，$F(x,y)=x^2+y^2-1$ として，条件 $F(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ の極値を考える．(a,b) で極値をもつとすれば，$a^2+b^2=1$ より，$F_x(a,b)=2a$，$F_y(a,b)=2b$ の少なくとも一方は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a(1-\lambda)=1 \\ 2b(2-\lambda)=0 \end{cases}$$

$b=0$ のとき，$a=\pm1$ なので，$f(a,b)=1\mp1=0,2$.

$b \neq 0$ のとき，$\lambda = 2$，$a = -1/2$ なので，$b = \pm\sqrt{3}/2$．よって，$f(a,b) = 9/4$．
以上から，最大値 $9/4$，最小値 $-1/4$．

(2)　$f(x,y) = (1-x^2-y^2)xy^2$ とすると，D の内部で $f_x = f_y = 0$ となる点は，$(x,y) = (0,\pm 1)$，$(1/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$，$(-1/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ と $y = 0$ となるすべての点 $(x,0) \in D$ である．まず，$f(x,0) = 0$ なので，点 $(x,0) \in D$ では極値をとらない．また，$(x,y) = (0,\pm 1)$ の場合も，$D > 0$ となり，極値をとらない．次に，点 $(\pm 1/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}/\sqrt{5})$ では，$D < 0$ となり，$x = 1/\sqrt{5}$ ならば $A < 0$ で，$x = -1/\sqrt{5}$ ならば $A > 0$．ゆえに，$f(1/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}/\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}/125$ は極大値で，$f(-1/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}/\sqrt{5}) = -4\sqrt{5}/125$ は極小値．一方，境界上では，$x^2+y^2 = 1$ を常に満たすので，$f(x,y) = (1-x^2-y^2)xy^2 = 0$．よって，最大値 $4\sqrt{5}/125$，最小値 $-4\sqrt{5}/125$．

(3)　$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ とすると，D の内部で $f_x = f_y = 0$ となる点は，$(x,y) = (0,0), (1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$．よって，$f(0,0) = 0$，$f(1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = \pm 1/(\sqrt{2}e)$, $f(-1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = \mp 1/(\sqrt{2}e)$ は極値の候補となる．
境界上の点は，$(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と表せるので，$f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin(2\theta)/(2e)$．よって，境界では最大値 $1/(2e)$，最小値 $-1/(2e)$ をとる．
以上から，最大値 $1/(\sqrt{2}e)$，最小値 $-1/(\sqrt{2}e)$．

11． 体積を定数 $c > 0$ とおいて，辺の長さを横 x，縦 y，高さ z とすると，$c = xyz$ となる．このとき，表面積は $2xy + 2yz + 2xz$ なので，z を消去して，

$$f(x,y) = 2xy + 2\frac{c}{x} + 2\frac{c}{y}$$

を，$x > 0, y > 0$ の範囲で最小化する x，y，z の条件を求めればよい．
まず，$\lim_{x\to 0} f(x,y) = +\infty$，$\lim_{y\to 0} f(x,y) = +\infty$，$\lim_{r\to\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = +\infty$ $(0 < \theta < \pi/2)$ なので，$f(x,y)$ は $x > 0$, $y > 0$ で $f(x,y)$ は最小値をもつ．
次に，$f_x = f_y = 0$ となるのは，

$$yx^2 = xy^2 = c.$$

よって，$xy(x-y) = 0$ となるので，$x = y$．これを，上の式に代入すると，$x^3 = y^3 = c$．ゆえに，$(x,y) = (\sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{c})$．この場合，$D < 0$ かつ $A > 0$ なので，$f(\sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{c}) = 6\sqrt[3]{c^2}$ は最小値となる．また，$z = c/(xy)$ なので，立方体 $(x = y = z = \sqrt[3]{c})$ のときが，表面積が最小になる．

12． (1)　$ab = 2$ のとき，$F_x(a,b) = b$，$F_y(a,b) = a$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a = \lambda b \\ 12b^3 = \lambda a \end{cases}$$

$b = 0$ とすると，$a = 0$ となるので，$ab = 2$ に反する．
$b \neq 0$ とすると，$(a,b) = \left(\pm 2(3/2)^{1/6}, \pm(2/3)^{1/6}\right)$ であり，$f(a,b) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$．
一方，$F(x,y) = 0$ の下では，$f(x,y) = x^2 + 6/x^4$ は最小値をもつが最大値をもたない．よって，$4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ は最小値となる．

(2)　$a+b=3$ のとき，$F_x(a,b)=1$，$F_y(a,b)=1$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} 2a=\lambda \\ 4b=\lambda \end{cases} \qquad \therefore a=2b.$$

$a+b=3$ なので，$(a,b)=(2,1)$ かつ $f(a,b)=6$.

一方，$F(x,y)=0$ の下では，$f(x,y)=x^2+2(3-x)^2$ は最小値をもつが最大値をもたない．よって，6 は最小値となる．

(3)　$a^2b^2=1$ のとき，$F_x(a,b)=2ab^2$，$F_y(a,b)=2a^2b$ は 0 でない．よって，ラグランジュの未定乗数法より，

$$\begin{cases} a(2a^2-b^2\lambda)=0 \\ b(1-a^2\lambda)=0 \end{cases}$$

$a=0$ のとき，$F(a,b)=-1\neq 0$ で不適．同様に，$b=0$ も不適．

$(a,b)\neq(0,0)$ のとき，$(a,b)=(\pm 1,1)$ かつ $f(a,b)=2$.

一方，$F(x,y)=0$ の下では，$f(x,y)=x^4+1/x^2$ は最小値をもつが最大値をもたない．よって，2 は最小値となる．