4.2 偏微分と全微分

問 1 (1) $f(x,y) = y^2 \sin x$ とすると，$h \to 0$ のとき，$\dfrac{f(\pi+h,1)-f(\pi,1)}{h} = \dfrac{\sin(\pi+h)}{h} = -\dfrac{\sin h}{h} \to -1$ なので，$f_x(\pi,1) = -1$．また，$\dfrac{f(\pi,1+k)-f(\pi,1)}{k} = 0$ なので，$f_y(\pi,1) = 0$.

(2) $f(x,y) = xy^2 + x$ とすると，$\dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \dfrac{2(1+h)-2}{h} = 2$ なので，$f_x(1,1) = 2$．また，$k \to 0$ のとき，$\dfrac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = \dfrac{2k+k^2}{k} = 2+k \to 2$ なので，$f_y(1,1) = 2$.

(3) $f(x,y) = x^2 - y^2$ とすると，$\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = h \to 0\,(h \to 0)$，$\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = -k \to 0$（$k \to 0$）なので，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(4) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ とすると，$\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$，$\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$ なので，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(5) $f(x,y) = y^x$ とすると，$\dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = 0$，$\dfrac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = 1$ なので，$f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 1$.

(6) $f(x,y) = \sin^{-1}\frac{y}{x}$ とすると，$\dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \dfrac{\sin^{-1}\frac{1}{1+h} - \frac{\pi}{2}}{h} = -\dfrac{\cos^{-1}\frac{1}{1+h}}{h}$ となる．ここで，逆三角関数の関係 $\cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ を用いた．また，導関数の公式 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いると，ロピタルの定理より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{(\cos^{-1}\frac{1}{1+h})'}{(h)'} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+h)\sqrt{(1+h)^2-1}} - \infty.$$

同様に，

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = -\lim_{k\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-(1+k)^2}} = \infty.$$

以上より，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ において偏微分可能でない．

問 2 (1) $f(x,y) = x^2 - y^2$ とすると，$f_x = 2x$，$f_y = -2y$.

(2) $f(x,y) = (x+y)^3$ とすると，$f_x = 3(x+y)^2$，$f_y = 3(x+y)^2$.

(3) $f(x,y) = \sin(2x+y)$ とすると，$f_x = 2\cos(2x+y)$，$f_y = \cos(2x+y)$.

(4) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると，$f_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

(5) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ とすると，$f_x = \dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$.

(6) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2-y^2}$ とすると，$f_x = -\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$，$f_y = -\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$.

(7) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ とすると，$f_x = \dfrac{2x}{y}$，$f_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

(8) $f(x,y) = e^{x^3+2y^2}$ とすると，$f_x = 3x^2 e^{x^3+2y^2}$，$f_y = 4ye^{x^3+2y^2}$.

(9)　$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ とする．公式 $\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$ を用いると，

$$f_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

同様に，

$$f_y=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

問 3　(1)　$z_x=4x$，$z_y=-6y$ なので，$dz=4xdx-6ydy$.

(2)　$z_x=-2\sin(2x+3y)$，$z_y=-3\sin(2x+3y)$ なので，$dz=-\sin(2x+3y)(2dx+3dy)$.

(3)　$z_x=2xe^{x^2+y^2}$，$z_y=2ye^{x^2+y^2}$ なので，$dz=2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)$.

(4)　$z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ なので，$dz=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(5)　$z_x=y\cos xy$，$z_y=x\cos xy$ なので，$dz=\cos xy(ydx+xdy)$.

(6)　$z_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$z_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ なので，$dz=2\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

(7)　$z_x=-\dfrac{y(x^2+y^2)}{x^2-y^2)^2}$，$z_y=\dfrac{x(x^2+y^2)}{x^2-y^2)^2}$ なので，$dz=\dfrac{(x^2+y^2)(-ydx+xdy)}{(x^2-y^2)^2}$.

(8)　$z_x=\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$，$z_y=\dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ なので，$dz=\dfrac{4xy(ydx-xdy)}{(x^2+y^2)^2}$.

(9)　$z_x=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，$z_y=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ なので，$dz=\dfrac{y^3dx+x^3dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

問 4　(1)　$f_x=2xy$，$f_y=x^2$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=2xyx'+x^2y'$.

(2)　$f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2(xx'+yy')}{x^2+y^2}$.

(3)　$f_x=\dfrac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y=\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{(x^2-y^2)(-yx'+xy')}{(x^2+y^2)^2}$.

(4)　$f_x=\dfrac{-x}{1-x^2-y^2}$，$f_y=\dfrac{-y}{1-x^2-y^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dt}=-\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

問 5　(1)　$y'=2$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+2f_y$.

(2)　$y'=2x$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+2xf_y$.

(3)　$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x-\dfrac{xf_y}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4)　$y'=(1+2x^2)e^{x^2}$ なので，$\dfrac{dz}{dx}=f_x+(1+2x^2)e^{x^2}f_y$.

問 6　$x_r=\cos\theta$，$y_r=\sin\theta$ なので，

$$z_r=z_xx_r+z_yy_r=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta.$$

同様に，$x_\theta=-r\sin\theta$，$y_\theta=r\cos\theta$ なので，

$$z_\theta=z_xx_\theta+z_yy_\theta=-z_xr\sin\theta+z_yr\cos\theta.$$

問 7　(1)　$x_u=2$，$y_u=2$ なので，$z_u=2(z_x+z_y)$．$x_v=3$，$y_v=-3$ なので，$z_v=3(z_x-z_y)$．

(2)　$x_u=2u$，$y_u=2u$ なので，$z_u=2u(z_x+z_y)$．$x_v=2v$，$y_v=-2v$ なので，$z_v=2v(z_x-z_y)$．

(3)　$x_u=e^v$，$y_u=ve^u$ なので，$z_u=e^vz_x+ve^uz_y$．$x_v=ue^v$，$y_v=e^u$ なので，$z_v=ue^vz_x+e^uz_y$．

(4)　$x_u=\cosh v$，$y_u=\sinh v$ なので，$z_u=z_x\cosh v+z_y\sinh v$．$x_v=u\sinh v$，$y_v=u\cosh v$ なので，$z_v=z_xu\sinh v+z_yu\cosh v$．

問 8　(1)　$f(x,y)=2xy^2$ とすると，$f_x=2y^2$，$f_y=4xy$ なので，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=4$．よって，接平面の方程式は，$z=2+2(x-1)+4(y-1)$．これを整理して，$z=2x+4y-4$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$2(x-1)=y-1=-4(z-2)$．

(2)　$f(x,y)=x^2+y^2$ とすると, $f_x=2x$, $f_y=2y$ なので, $f_x(1,1)=2$, $f_y(1,1)=2$. よって, 接平面の方程式は, $z=2+2(x-1)+2(y-1)$．これを整理して, $z=2x+2y-2$. また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$x-1=y-1=-2(z-2)$.

(3)　$f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}$ とすると，$f_x=x$，$f_y=2y/3$ なので，$f_x(2,3)=2$，$f_y(2,3)=2$．よって，接平面の方程式は，$z=5+2(x-2)+2(y-3)$．これを整理して，$z=2x+2y-5$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$．これを整理して，$x-2=y-3=-2(z-5)$.

(4)　$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ とすると，$f_x=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ なので，$f_x(1,2)=-1/2$，$f_y(1,2)=-1$．よって，接平面の方程式は，$z=2-\dfrac{1}{2}(x-1)-(y-2)$．これを整理して，$z=-\frac{x}{2}-y+\frac{9}{2}$．また，法線の方程式は，$\dfrac{x-1}{-1/2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$．これを整理して，$2(x-1)=y-2=z-2$.