4 章の解答例

4.1　2 変数関数の極限と連続性

問 1　(1)　$f(x,y)=x-y+1$ の値はすべての (x,y) で定まるので，定義域は平面上のすべての点である．また，$(x,y,z)=(x,y,x-y+1)=x(1,0,1)+y(0,1,-1)+(0,0,1)$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，3 点 $(0,0,1)$，$(0,1,0)$，$(-1,0,0)$ を通る平面となる．

(2)　$f(x,y)=x^2+y^2$ の値はすべての (x,y) で定まるので，定義域は平面上のすべての点である．また，極座標表示 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ すると，θ によらずに $z=r^2$ となる．よって，$z=f(x,y)$ のグラフは，xz 平面での曲線 $z=x^2$ を z 軸中心に回転させたものとなる．

(3)　$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ は，$1-x^2-y^2\geq 0$ のとき定義されるので，定義域は半径 1 の円板とその内部である．また，極座標表示すると，θ によらず $z=\sqrt{1-r^2}$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，xz 平面での曲線 $z=\sqrt{1-x^2}$ を z 軸中心に回転させたものとなる．

(4)　$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ の値は $x^2-y^2=0$ となる点を除いて定まる．よって，定義域は 2 直線 $y=x$ と $y=-x$ を除く平面上のすべての点となる．また，$f(x,y)=c$ とすると，$x^2-y^2=\frac{1}{c}$ $(c\neq 0)$ となり，これが $z=f(x,y)$ の等高線である．

(5)　$f(x,y)=xy$ の値はすべての (x,y) で定まるので，定義域は平面上のすべての点となる．また，$f(x,y)=c$ を解くと，$y=\frac{c}{x}$ が $z=f(x,y)$ の等高線となる．

(6)　$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ は $x^2+y^2=0$ となる点を除いて定まるので，定義域は原点を除く平面上のすべての点となる．また，極座標表示すると，θ によらず $z=2\log r$ となるので，$z=f(x,y)$ のグラフは，xz 平面での曲線 $z=2\log|x|$ を z 軸を中心に回転させたものとなる．

問 2　(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2-y^3)=1.$

(2)　$f(x,y)=\dfrac{x^3-y^4}{x^2+y^2}$ を極座標表示すると, $|f(x,y)|=r|\cos^3\theta-r\sin^4\theta|\leq r(1+r)$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=r(1+r)$ とおくと，$\epsilon(r)$ は θ によらない関数で，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(3)　$f(x,y)=xy\log(x^2+y^2)$ を極座標表示すると，$|f(x,y)|\leq 2r^2\log r$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=2r^2\log r$ とおくと，$\epsilon(r)$ は θ によらない関数である．また，ロピタルの定理より，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=\lim_{r\to 0}\left(-\frac{r^2}{2}\right)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(4)　$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上では $f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}\dfrac{1}{x}$ なので，$x\to 0$ の極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない．

(5)　$f(x,y)-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を極座標変換すると, $|f(x,y)|\leq r$ となる．最右辺を $\epsilon(r)=r$ とおくと，$\epsilon(r)$ は θ によらない関数で，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\epsilon(r)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

(6) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y}$ は，直線 $y=0$ 上では $f(x,y)=0$ である．一方，直線 $x=0$ 上では $f(x,y)=1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

問 3 (1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上で $f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}$ となり，原点への近づけ方によらない極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，$\displaystyle\lim_{x\to0} f(x,y)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{y\to0} f(x,y)=0$ なので，一方，累次極限は

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=0.$$

(2) $f(x,y)=\dfrac{y(x-y)}{x^2+y^2}$ は，直線 $y=mx$ 上で $f(x,y)=\dfrac{m-m^2}{1+m^2}$ となり，原点への近づけ方によらない極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}(-1)=-1,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}0=0.$$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$ は，直線 $y=mx$ 上では $f(x,y)=\dfrac{m}{1+m^2}$ なので，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}0=0.$$

(4) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$ は，直線 $x=0$ 上では $f(x,y)=0$，直線 $y=0$ 上では $f(x,y)=1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}1=1.$$

(5) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x+y}$ は，$y=mx$ $(x>0)$ 上では $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{|m|}}{1+m}$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，累次極限は,

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}0=0.$$

(6) $f(x,y)=\dfrac{2x-3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は，直線 $x=0$ の $y>0$ の部分では，$f(x,y)=-3$，直線 $x=0$ の $y<0$ の部分では，$f(x,y)=3$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0} f(x,y)$ は存在しない．また，$\displaystyle\lim_{x\to0} f(x,y)=-3\frac{y}{|y|}$，$\displaystyle\lim_{y\to0} f(x,y)=2\frac{x}{|x|}$ なので，累次極限も存在しない．

問 4 (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x+3y)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos y=1$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x+3y)\cos y=0\cdot1=0.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2$ なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{x^2+y^2}=e^2.$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin x\cos y=0\cdot1=0.$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} e^{y^2}\log x=1\cdot0=0.$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy+2\sin\pi y+1}{x^2+y^2} = \frac{2-2\cdot 0+1}{1+4} = \frac{3}{5}$.

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} xy\log|xy| = 1\cdot 0 = 0$.

問 5 (1) $F(z)=e^z$ と $g(x,y)=x^2+y^2$ は連続なので，合成関数 $F(g(x,y))=e^{x^2+y^2}$ は平面上のすべての点で連続である．よって，$f(x,y)=1+xe^{x^2+y^2}$ も平面上のすべての点で連続である．

(2) $F(z)=\log(1+z)$ $(z>0)$ と $g(x,y)=x^2+y^2$ は連続なので，$f(x,y)=F(g(x,y))=\log(1+x^2+y^2)$ は平面上のすべての点で連続である．

(3) $\sin(x+y)$ と $\cos(x-y)$ の連続性は，$\sin z$，$\cos z$ および $x\pm y$ の連続性から導かれる．よって，それらの積である $f(x,y)=\sin(x+y)\cos(x-y)$ は，平面上のすべての点で連続である．

(4) (3) と同様にして，$\sin(x+y)$ と $\cos(x+y)$ は連続であり，$1+z^2$ が連続であることから合成関数 $1+\cos^2(x+y)$ も連続である．また，$1+\cos^2(x+y)\geq 1>0$ なので，$f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{1+\cos^2(x+y)}$ は平面上のすべての点で連続である．

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないので，$f(x,y)$ は原点において連続でない．一方，原点以外では $x^2+y^2>0$ なので，原点を除く平面上のすべての点で $f(x,y)$ は連続である．

(6) 原点以外では $x^2+y^2>0$ なので，$f(x,y)$ は連続である．また，極座標表示すると $f(x,y)=2r^2\log r$ となる．ロピタルの定理より

$$\lim_{r\to 0} 2r^2\log r = 2\lim_{r\to 0}\frac{(\log r)'}{(r^{-2})'} = -\lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

なので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$．よって，原点においても連続なので，$f(x,y)$ は平面上のすべての点で連続である．