3 積分

3.4 定積分の応用

問 1. 以下では，図形の面積を S とする．

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は $x=0,\pm 2$．曲線を表す関数は偶関数であることに注意すれば，

$$S=2\int_0^2\left\{3-(x^2-1)(x^2-3)\right\}dx=2\int_0^2(4x^2-x^4)\,dx=2\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=\frac{128}{15}.$$

(2) 曲線と直線の交点の x 座標は $x=\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$．よって

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}\sqrt{x}\,dx+\int_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}\left(\sqrt{x}-x+1\right)dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}.\end{aligned}$$

(3) 曲線と直線の交点の x 座標は $x=2$．よって

$$S=\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x}{2}\right)dx=\left[4\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_0^2=4\tan^{-1}1-1=\pi-1.$$

(4) $y=3\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^2=3\left(1-\sqrt{2x}+\dfrac{x}{2}\right)$ より，

$$S=3\int_0^2\left(1-\sqrt{2x}+\frac{x}{2}\right)dx=3\left[x-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{4}\right]_0^2=1.$$

(5) 図形が x 軸に関して対称であることに注意すると，

$$S=2\int_0^1\frac{3}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{3}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

別解． $x=1$ のとき $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．図形が x 軸に関して対称であることに注意すると，

$$S=2\int_0^1y\,dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt=24\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}t^4\,dt=24\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

問 2. 図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt\\&=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(3-4\cos t+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left[3t-4\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2.\end{aligned}$$

問 3.　以下では，図形の面積を S とする．

(1)　教科書 80 頁の図 3.3 より，図形は x 軸と y 軸に関して対称．よって，第一象限の部分の面積を 4 倍して，

$$S = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

(2)　教科書 80 頁の図 3.3 より，図形は x 軸と y 軸に関して対称．よって，第一象限の部分の面積を 4 倍して，

$$S = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = a^2\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^2.$$

(3)　教科書 80 頁の図 3.3 より，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta \\ &= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{9a^2}{2}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\beta}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

ここで，$\tan\theta = t$ とおくと，$\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = dt$．また，$\theta$ が 0 から β まで動くとき，t は 0 から $\tan\beta$ まで動く．よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta &= \int_0^{\tan\beta}\frac{t^2}{(t^3+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3(t^3+1)}\right]_0^{\tan\beta} \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\tan^3\beta+1}\right). \end{aligned}$$

ゆえに

$$S = \frac{9a^2}{2}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\tan^3\beta+1}\right) = \frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3a^2}{2}.$$

問 4.　以下では，曲線の長さを L とする．

(1)　教科書 80 頁の図 3.3 より，

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt \\ &= \sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= -4a\big(\cos\pi - \cos 0\big) = 8a. \end{aligned}$$

(2)　$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ とおくと，$f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$1+f'(x)^2 = \dfrac{a^2}{a^2-x^2}$．よって

$$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx = a \in_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$$

$$= a\left\{\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1)\right\} = a\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \pi a.$$

(3)　$f(\theta) = a(1+\cos\theta)$ とおくと，$f'(\theta) = -a\sin\theta$．よって

$$f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

教科書 80 頁の図 3.3 より，曲線は x 軸に関して対称．よって

$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

問 5.　以下では，立体の体積を V とする．

(1)　立体を x 軸に垂直な平面で切った断面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot c\left(1-\frac{x}{a}\right) = \frac{bc}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2.$$

よって

$$V = \int_0^a S(x)\,dx = \frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{bc}{2}\left[-\frac{a}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a = \frac{abc}{6}.$$

(2)　正三角錐の底面の面積は $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$．底面から頂点までの高さ h は，ピタゴラスの定理より，

$$h^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \qquad \therefore\quad h = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

底面からの高さが x である底面と平行な平面でこの正三角錐を切った部分の断面は，1 辺の長さが $\frac{h-x}{x}a$ の正三角形になるので，その面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{h-x}{h}a\right)^2.$$

よって

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\int_0^h\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\sqrt{3}'}{4}a^2\left[-\frac{h}{3}\left(1-\frac{x}{h}\right)^3\right]_0^h = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

問 6.　楕円球の対称性より，その体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4\pi}{3}ab^2.$$

問 7.　以下では，回転体の体積を V とする．

(1)　教科書 80 頁の図 3.3 より，図形の対称性を考慮すると，

$$V = 2\pi\int_0^a\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2 dx = \frac{\pi a^2}{2}\int_0^a\left(e^{\frac{2}{a}x} + e^{-\frac{2}{a}x} + 2\right)dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2}{a}x} - \frac{a}{2}e^{-\frac{2}{a}x} + 2x\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right).$$

(2)　$f(x) = b + \sqrt{a^2-x^2}$，$g(x) = b - \sqrt{a^2-x^2}$ とおくと，図形の対称性より，

$$V = 2\pi\int_0^a f(x)^2\,dx - 2\pi\int_0^a g(x)^2\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^a \{f(x)+g(x)\}\cdot\{f(x)-g(x)\}\,dx \\
&= 2\pi \int_0^a 2b\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}dx = 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= 8\pi b\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_0^a \quad (\text{例 } 3.1.3 \text{ の公式}) \\
&= 8\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{4} = 2\pi^2 a^2 b.
\end{aligned}
$$

(3)　教科書 80 頁の図 3.3 より，

$$V = 2\pi\int_0^{\pi a} y^2\,dx.$$

ここで，$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ なので，$dx=a(1-\cos t)\,dt$，$y^2=a^2(1-\cos t)^2$．また，x が 0 から πa まで動くとき，t は 0 から π まで動く．よって

$$V = 2\pi\int_0^{\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt = 2\pi a^3\int_0^{\pi}(1-\cos t)^3\,dt.$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(1-\cos t)^3 &= 1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t \\
&= 1-3\cos t+3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{\cos 3t+3\cos t}{4} \\
&= \frac{5}{2}-\frac{15}{4}\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\cos 3t.
\end{aligned}
$$

よって

$$V = 2\pi a^3\left[\frac{5}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right]_0^{\pi} = 2\pi a^3\cdot\frac{5\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.$$