3　積分

3.2　定積分

問 1.　$f(x) = x^2$ は $[0,1]$ で連続なので積分可能．よって，区分求積公式より，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n-1)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

問 2.　$g(x)$ が恒等的に 0 のときは，任意の $c \in (a,b)$ に対して成り立つ．よって，少なくとも 1 点で $g(x) > 0$ とする．このとき，定理 6 の (4) より，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$ となる．

さて，定理 1.15 (最大値・最小値の定理) より，$f(x)$ の $[a,b]$ における最小値を m，最大値を M とする．$m = M$ のときは，$f(x)$ は定数関数で，$f(x) = m$ となる．よって，任意の $c \in (a,b)$ に対して

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = m\int_a^b g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

となり成り立つ．そこで，以下では $m < M$ と仮定する．このとき，$m \leqq f(x) \leqq M$ かつ $g(x) \geqq 0$ より，$mg(x) \leqq f(x)g(x) \leqq Mg(x)$ なので，

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

そこで

$$\lambda := \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

とおくと，$m \leqq \lambda \leqq M$．ゆえに，定理 1.14 (中間値の定理) より，$f(c) = \lambda$ となる $c \in [a,b]$ が存在するので，

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

参考．$g(x) = 1$ のときは積分の平均値の定理 (定理 3.7) である．

問 3.　(1)　$\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^8\,dx = \left[\frac{1}{18}(2x-1)^9\right]_0^1 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{4}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{7}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}(2-1) = \frac{1}{\log 2}$

問 4.　(1)　$f(x) = \dfrac{1}{t^2+1}$ は $[1,\infty)$ で連続なので，定理 3.8 (微分積分学の基本定理) より

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

は $[1,\infty)$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(2)　与式を変形すると

$$\int_x^{x^2} e^t \cos t\, dt = \int_0^{x^2} e^t \cos t\, dt - \int_0^x e^t \cos t\, dt = F(x^2) - F(x).$$

$f(t) = e^t \cos t$ は $(-\infty, \infty)$ で連続なので，微分積分学の基本定理より

$$F(x) = \int_0^x e^t \cos t\, dt$$

は $(-\infty, \infty)$ で微分可能で，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^t \cos t\, dt &= \frac{d}{dx}\left\{F(x^2) - F(x)\right\} = 2xF'(x^2) - F'(x)\\ &= 2xf(x^2) - f(x) = 2xe^{x^2}\cos x^2 - e^x \cos x.\end{aligned}$$

(3)　与式を変形すると

$$\int_1^{x^2+1} (t-x)e^t\, dt = \int_1^{x^2+1} te^t\, dt - x\int_1^{x^2+1} e^t\, dt.$$

$f(t) = te^t$ と $g(t) = e^t$ は $(-\infty, \infty)$ で連続なので，微分積分学の基本定理より

$$F(x) = \int_1^x te^t\, dt, \qquad G(x) = \int_1^x e^t\, dt$$

はともに $(-\infty, \infty)$ で微分可能で，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^2+1}(t-x)e^t\, dt &= \frac{d}{dx}\left\{F(x^2+1) - xG(x^2+1)\right\}\\ &= 2xF'(x^2+1) - G(x^2+1) - 2x^2G'(x^2+1)\\ &= 2xf(x^2+1) - G(x^2+1) - 2x^2 g(x^2+1)\\ &= 2x(x^2+1)e^{x^2+1} - \int_1^{x^2+1} e^t\, dt - 2x^2e^{x^2+1}\\ &= 2x(x^2+1)e^{x^2+1} - \Big[e^t\Big]_1^{x^2+1} - 2x^2e^{x^2+1}\\ &= 2x(x^2+1)e^{x^2+1} - e^{x^2+1} + e - 2x^2e^{x^2+1}\\ &= (2x^3 - 2x^2 + 2x - 1)e^{x^2+1} + e.\end{aligned}$$

問 5.　(1)　$$\begin{aligned}\int_1^2 x(x-1)^7\, dx &= \left[\frac{x}{8}(x-1)^8\right]_1^2 - \frac{1}{8}\int_1^2 (x-1)^8\, dx\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{9}(x-1)^9\right]_1^2 = \frac{17}{72}.\end{aligned}$$

(2)　$\sqrt{x+1} = t$ とおくと，$x = t^2 - 1$，$dx = 2t\, dt$．また，x が 0 から 1 まで動くとき，t は 1 から $\sqrt{2}$ まで動く．よって

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\, dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)^2\, dt$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = 2\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{5}(4\sqrt{2} - 1) - \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{2} - 1) = \frac{2}{15}(7\sqrt{2} - 8).$$

(3)　$\log x = t$ とおくと，$\dfrac{dx}{x} = dt$．また，x が 1 から e まで動くとき，t は 0 から 1 まで動く．よって

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(4)　$\sqrt{2-x} = t$ とおくと，$x = 2 - t^2$，$dx = -2t\,dt$．また，x が 0 から 1 まで動くとき，t は $\sqrt{2}$ から 1 まで動く．よって

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2-t^2}{t}\cdot(-2t\,dt) = 2\int_{\sqrt{2}}^1 (t^2 - 2)\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3 - 2t\right]_{\sqrt{2}}^1$$
$$= \frac{2}{3}(1 - 2\sqrt{2}) - 4(1 - \sqrt{2}) = \frac{2}{3}(4\sqrt{2} - 5).$$

(5)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，$dx = \dfrac{2\,dt}{t^2+1}$，$\sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}$．また，$x$ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，t は 0 から 1 まで動く．よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + 3\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{2 + 3\cdot\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2\,dt}{t^2+1} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3t + 1}$$
$$= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\log\left|\frac{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right| - \log\left|\frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}.$$

(6)　$\sqrt{1 + e^x} = t$ とおくと，$1 + e^x = t^2$，$e^x dx = 2t\,dt$．また，x が 0 から 1 まで動くとき，t は $\sqrt{2}$ から $\sqrt{1+e}$ まで動く．よって

$$\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1 + e^x}\,dx = \int_0^1 e^x\sqrt{1 + e^x}\cdot e^x dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} (t^2 - 1)\cdot t\cdot(2t\,dt)$$
$$= 2\int_{\sqrt{2}} \sqrt{1+e} t^2(t^2 - 1)\,dt = 2\int_{\sqrt{2}} \sqrt{1+e}(t^4 - t^2)\,dt$$
$$= 2\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}$$
$$= \frac{2}{5}\left\{(1+e)^2\sqrt{1+e} - 4\sqrt{2}\right\} - \frac{2}{3}\left\{(1+e)\sqrt{1+e} - 2\sqrt{2}\right\}$$
$$= \frac{2}{15}(3e - 2)(1 + e)\sqrt{1+e} - \frac{4}{15}\sqrt{2}.$$

(7)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，$dx = \dfrac{2\,dt}{t^2+1}$，$\sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}$．また，$x$ が $\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，t は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から 1 まで動く．よって

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dt}{t} = \Big[\log|t|\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = -\log\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log 3.$$

(8)　$x+3=t$ とおくと，$dx=dt$．また，x が 0 から 3 まで動くとき，t は 3 から 6 まで動く．よって

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x^2}{(x+3)^2}\,dx &= \int_3^6 \frac{(t-3)^2}{t^2}\,dt = \int_3^6 \left(1-\frac{6}{t}+\frac{9}{t^2}\right)dt \\ &= \left[t-6\log|t|-\frac{9}{t}\right]_3^6 = \frac{9}{2}-6\log 2.\end{aligned}$$

(9)　$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$．また，x が 0 から π まで動くとき，t は 1 から -1 まで動く．よって

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 x\cos^4 x\,dx &= \int_0^\pi \sin^2 x\cos^4 x\sin x\,dx = \int_1^{-1} (1-t^2)\cdot t^4\cdot(-dt) \\ &= \int_{-1}^1 (t^4-t^6)\,dt = \left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{35}.\end{aligned}$$

(10)　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(11)　$$\begin{aligned}\int_1^3 x\,(\log x)^2\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_1^2 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx = \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \int_1^3 x\log x\,dx \\ &= \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \left\{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\} \\ &= \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \frac{9}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx \\ &= \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \frac{9}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \frac{9}{2}\log 3 + 2.\end{aligned}$$

(12)　$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx &= \Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\left\{\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right\} = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2.\end{aligned}$$

(13)　$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-x}dx &= \Big[x^2(-e^{-x}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -e^{-1} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \\ &= -e^{-1} + 2\left\{\Big[x(-e^{-x})\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx\right\} = -e^{-1} + 2\left\{-e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx\right\} \\ &= -3e^{-1} + 2\Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 2-5e^{-1}.\end{aligned}$$

(14)　$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx &= \Big[e^{-x}(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx \\ &= 1+e^{-\pi} - \left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx\right\}\end{aligned}$$

$$= 1 + e^{-\pi} - \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx.$$

よって

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}).$$

(15) $$\int_0^1 \cos^{-1} x \, dx = \Big[x \cos^{-1} x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = 1.$$

問 6. $n \geqq 3$ とする．部分積分公式を用いて計算すると，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{n-2}}{\cos^2 x} \, dx - I_{n-2}.$$

ここで，$\tan x = t$ とおくと，$\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$．また，$x$ が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき，t は 0 から 1 まで動く．よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^1 t^{n-2} \, dt = \left[\frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{n-1}.$$

ゆえに

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つ．

上で示した漸化式より，

$$I_3 = \frac{1}{2} - I_1, \quad I_4 = \frac{1}{3} - I_2, \quad I_5 = \frac{1}{4} - I_3.$$

よって

$$I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - I_2\right) = -\frac{2}{15} + I_2 \tag{①}$$

$$I_7 = \frac{1}{6} - I_5 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{4} - I_3\right) = -\frac{1}{12} + I_3 = -\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = \frac{5}{12} - I_1. \tag{②}$$

ここで

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2. \tag{③}$$

また，$\tan x = t$ とおくと，$dx = \dfrac{dt}{t^2+1}$．さらに，x が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき，t は 0 から 1 まで動く．よって

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} \, dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \Big[t - \tan^{-1} t\Big]_0^1$$
$$= 1 - (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = 1 - \frac{\pi}{4}. \tag{④}$$

よって，①，②，③，④より，

$$I_6 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}, \quad I_7 = \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\log 2.$$

問 7.　(1)　$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ は $[0,1]$ で連続なので積分可能．よって，区分求積公式より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-i^2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}+x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}1-\sin^{-1}0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(2)　$f(x) = x\sin\pi x$ は $[0,1]$ で連続なので積分可能．よって，区分求積公式より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 x\sin\pi x\,dx = \left[x\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

(3)　$f(x) = \sqrt{x}$ は $[0,1]$ で連続なので積分可能．よって，区分求積公式より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(4)　$f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$ は $[0,1]$ で連続なので積分可能．よって，

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4n^2-i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{4n^2-i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{dx}{4-x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log 3-\log 1\right) = \frac{1}{4}\log 3.$$