2　微分

2.1 導関数

問 1.

(2) $$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(4) $$(\log x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{h}{x}}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

(6) $$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$
$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

問 2. (1) $(x^4-3x+1)' = 4x^3-3.$

(2) $\{(x-1)(x^2+1)\}' = (x^2+1)+(x-1)\cdot 2x = 3x^2-2x+1.$

(3) $$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

(4) $$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

(5) $$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)' = \frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}.$$

(6) $(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$

(7) $$(x^2\log x)' = 2x\log x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x(2\log x+1).$$

(8) $(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x-\sin x).$

(9) $$(x\tan x)' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}.$$

(10) $$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

(11) $$\left(\frac{1}{\log x}\right)' = -\frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = -\frac{1}{x(\log x)^2}.$$

(12) $$\left(\frac{e^x}{\tan x}\right)' = \frac{e^x\tan x - e^x\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{e^x(\sin x\cos x-1)}{\sin^2 x}.$$

問 3. (1) $\{(2x+3)^5\}' = 5(2x+3)^4\cdot(2x+3)' = 10(2x+3)^4.$

(2) $\{(3x^2-2)^4\}' = 4(3x^2-2)^3\cdot(3x^2-2)' = 24x(3x^2-2)^3.$

(3) $$\left\{\frac{(2x+1)^3}{(2x-1)^6}\right\}' = \frac{3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'(2x-1)^6-(2x+1)^3\cdot 6(2x-1)^5\cdot(2x-1)'}{(2x-1)^{12}}$$

$$= -\frac{6(2x+3)(2x+1)^2}{(2x-1)^7}.$$

(4) $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}.$

(5) $(e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$

(6) $\{\log(1-3x)\}' = \frac{(1-3x)'}{1-3x} = -\frac{3}{1-3x}.$

(7) $\{\log(x^2+1)\}' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}.$

(8) $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x.$

(9) $(\cos x^2) = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -2x \sin x^2.$

(10) $(\tan 4x)' = \frac{(4x)'}{\cos^2 4x} = \frac{4}{\cos^2 4x}.$

(11) $(\tan \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x}\,)'}{\cos^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\cos^2 \sqrt{x}}.$

(12) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2.$

(13) $\left(\frac{1}{\sin \sqrt{x}}\right)' = -\frac{(\sin \sqrt{x}\,)'}{\sin^2 \sqrt{x}} = -\frac{\cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}\,)'}{\sin^2 \sqrt{x}} = -\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sin^2 \sqrt{x}}.$

(14) $\left\{\frac{1}{\cos(2x+1)}\right\}' = -\frac{\{\cos(2x+1)\}'}{\cos^2(2x+1)} = \frac{\sin(2x+1) \cdot (2x+1)'}{\cos^2(2x+1)} = \frac{2\sin(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}.$

(15) $\left\{\frac{1}{\tan(1-x)}\right\}' = -\frac{\{\tan(1-x)\}'}{\tan^2(1-x)} = -\frac{\frac{(1-x)'}{\cos^2(1-x)}}{\tan^2(1-x)} = \frac{1}{\sin^2(1-x)}.$

問 4. (1) $(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$

(2) $(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x.$

(3) $$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

問 5. (1) $\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

(2) $\left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \left(\tan^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$

問 6. (1) $(\log|\log x|)' = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}.$

(2) $(\log|\tan x|)' = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x \tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}.$

(3) $\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

(4) $\left\{(2x+1)^{\frac{1}{3}}\right\}' = \dfrac{1}{3}(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}.$

(5) $(2^{2x-1})' = 2^{2x-1}\log 2\cdot(2x-1)' = 2\cdot 2^{2x-1}\log 2 = 2^{2x}\log 2.$

(6) $y = x^x$ $(x>0)$ とおき，対数をとると $\log y = \log x^x = x\log x$ である．両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

よって

$$y' = x^x(\log x + 1).$$

(7) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x}\right)' = \dfrac{(\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1-(1-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$

(8) $(\cos^{-1}x^2)' = -\dfrac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$

(9) $\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$

問 7. (1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 1-\dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2}$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^3}.$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t + \cos t$，$\dfrac{dy}{dt} = -\sin t - \cos t$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}.$$

問 8. (1) $y' = \cos x$ だから点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

また，法線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ だから $t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2},$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2}, \qquad \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}.$$

これより接線の方程式は

$$y-\frac{a}{2}=\sqrt{3}\left\{x-a\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \qquad \therefore \quad y=\sqrt{3}\,x+a\left(2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

また，法線の方程式は

$$y-\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{x-a\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \qquad \therefore \quad y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\,a}{3\sqrt{3}}.$$

2.2　高次導関数

問 1.　(1)　$y' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y'' = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$，

$y''' = -\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ だから

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(2)　$y' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y'' = 2^2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2^2\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$，

$y''' = 2^3\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{2}\right) = 2^3\sin\left(2x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ だから

$$y^{(n)} = 2^n\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(3)　$y' = \dfrac{(1-x)'}{1-x} = -(1-x)^{-1}$，$y'' = (-1)^2\cdot(-1)(1-x)^{-2}$，$y''' = (-1)^3\cdot(-1)(-2)(1-x)^{-3}$ だから

$$y^{(n)} = (-1)^n\cdot(-1)(-2)\cdots\{-(n-1)\}(1-x)^{-n} = (-1)^{2n-1}(n-1)!(1-x)^{-n}.$$

これより，

$$y^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

問 2.　(1)　$u = \cos 2x$，$v = x$ とおくと，$u^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　$(n = 1, 2, \dots)$．$v' = 1$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 2, 3, \dots)$．よって，ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= {}_nC_0u^{(n)}v + {}_nC_1u^{(n-1)}v' = 2^nx\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n-1}\left\{2x\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

(2)　$u = e^x$，$v = x^3$ とおくと，$u^{(n)} = e^x$　$(n = 1, 2, \dots)$．$v' = 3x^2$，$v'' = 6x$，$v''' = 6$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 4, 5, \dots)$．よって，ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= {}_nC_0u^{(n)}v + {}_nC_1u^{(n-1)}v' + {}_nC_2u^{(n-2)}v'' + {}_nC_3u^{(n-3)}v''' \\ &= e^x\left\{x^3 + n\cdot 3x^2 + \frac{1}{2!}n(n-1)\cdot 6x + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\cdot 6\right\} \\ &= e^x\left\{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

(3)　$y' = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^x\left(\sin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,e^x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$，

$y'' = \sqrt{2}\,e^x\left\{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\} = (\sqrt{2}\,)^2e^x\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right)$，

$y''' = (\sqrt{2}\,)^2e^x\left\{\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right)\right\} = (\sqrt{2}\,)^3e^x\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ だから

$$y^{(n)} = (\sqrt{2}\,)^ne^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

問 3. $f(x) = \cos x$ とおく．$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ なので $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$．よって，マクローリンの定理より

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k!}\,x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\,x^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．ここで，ラグランジュの剰余 $R_n(x)$ を評価すると

$$|\,R_n(x)\,| = \frac{|\,x\,|^n}{n!}\,\left|\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqq \frac{|\,x\,|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって，はさみうちの原理よりすべての実数 x に対して $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$．さらに，マクローリン展開式を偶数項と奇数項に分けて計算すると

$$\begin{aligned}\cos x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k!}\,x^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{(2k)\pi}{2}}{(2k)!}\,x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} \quad (|\,x\,| < \infty)\end{aligned}$$

となる．

問 4. $f(x) = \sinh x$ とおく．$f^{(2n)}(x) = \sinh x$, $f^{(2n+1)} = \cosh x$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ なので $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = 1$．n が偶数のとき，マクローリンの定理より

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x), \quad R_{2n}(x) = \frac{\sinh(\theta x)}{(2n)!}\,x^{2n}$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．ここで，ラグランジュの剰余 $R_{2n}(x)$ を評価すると

$$|\,R_{2n}(x)\,| = \frac{|\,x\,|^{2n}}{(2n)!}\,|\sinh(\theta x)\,| \leqq \frac{|\,x\,|^{2n}}{(2n)!}\sinh|\,\theta x\,| \leqq \frac{|\,x\,|^{2n}}{(2n)!}\sinh|\,x\,| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって，はさみうちの原理よりすべての実数 x に対して $R_{2n}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$．

次に，n が奇数のとき，マクローリンの定理より

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{\cosh(\theta x)}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．ここで，ラグランジュの剰余 $R_{2n+1}(x)$ を評価すると

$$|\,R_{2n}(x)\,| = \frac{|\,x\,|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\cosh(\theta x)\,| \leqq \frac{|\,x\,|^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh|\,x\,| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって，はさみうちの原理よりすべての実数 x に対して $R_{2n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$．

これより，

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|\,x\,| < \infty)$$

となる．同様にして

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (|\,x\,| < \infty)$$

が得られる．

2.3　微分の応用

問 1.　(1)　$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2}{5^x\log 5}=\frac{\log 2}{\log 5}.$

(2)　$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0.$

(3)　$\displaystyle \lim_{x\to +0}x\log\frac{1}{x}=-\lim_{x\to +0}x\log x=-\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}x=0.$

(4)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6}=-\frac{1}{6}.$$

(5)
$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

(6)　対数をとることで不定形の極限値に変形してからロピタルの定理を用いると

$$\log\left\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x+b^x)'}{a^x+b^x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}.$$

これより

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}.$$

問 2.　(1)

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{4x(x^2+x+1)-2(x^2-1)\cdot 2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}=-\frac{4(x^3-3x-1)}{(x^2+x+1)^3}$$

である．$f'(x)=0$ より $x=\pm 1$ であり，$f''(1)=\frac{4}{9}$ (>0) だから $f(1)$ は極小値である．また，$f''(-1)=-4$ (<0) だから $f(-1)$ は極大値である．これより，

極大値　3　　　$(x=-1$ のとき$)$

極小値　$\frac{1}{3}$　　　$(x=1$ のとき$)$

（参考）$\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ だから $y=1$ を漸近線にもつ．

(2)　定義域は $-1\leqq x\leqq 1$ である．これより $g(x)$ は最大値及び最小値をもつ．

$$g'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad g''(x)=-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

である．$g'(x)=0$ より $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$g''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4\sqrt{3}\ (<0)$ だから $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は極大値である．また，$g''\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3}\ (>0)$ だから $g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は極小値である．これより，

$$\text{最大値}\quad \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\qquad\qquad \left(x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ のとき}\right)$$

$$\text{最小値}\quad -\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\qquad\qquad \left(x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ のとき}\right)$$

（参考）$g(1)=2-\frac{\pi}{2}$，$g(-1)=-2+\frac{\pi}{2}$ である．また，$\lim_{x\to 1-0}g'(x)=\lim_{x\to -1+0}g'(x)=-\infty$ であるから $x=\pm 1$ に接する．

問 3. (1)　半径 r の球に内接する直円柱の高さを $2x$ $(0<x<r)$ とすると，直円柱の底面の円の半径は $\sqrt{r^2-x^2}$ である．これより，直円柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x)=\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 2x=2\pi(r^2x-x^3)$$

となる．$V'(x)=2\pi(r^2-3x^2)$，$V''(x)=-12\pi x$ である．$V'(x)=0$ より $x=\pm\frac{r}{\sqrt{3}}$ であり，$0<x<r$ より $x=\frac{r}{\sqrt{3}}$ である。このとき，$V''\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=-4\sqrt{3}\pi r\ (<0)$ だから $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ は極大値である．$V(0)=V(r)=0$ より $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ は最大値である．これより，求める最大値は $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$ である．

(2)　定点 A を通る直線の傾きを m とすると，題意から $m<0$ である．直線の方程式は $y-b=m(x-a)$ より，x と y 軸との交点の座標はそれぞれ $\left(a-\frac{b}{m},0\right)$，$(0,b-am)$ である．これより，線分の長さの 2 乗 $\ell(m)$ は $\ell(m)=\left(a-\frac{b}{m}\right)^2+(b-am)^2=(b-am)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$ だから

$$\ell'(m)=-2(b-am)\left(a+\frac{b}{m^3}\right),\qquad \ell''(m)=2\left(a^2-\frac{2ab}{m^3}+\frac{3b^2}{m^4}\right)$$

となる．$\ell'(m)=0$，$m<0$ より $m=-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ である．このとき，

$$\ell''\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=3a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\ (>0)$$

だから $\ell\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ は極小値である．これより，$\ell\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ だから求める最小値は $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ である．

問 4. $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$，$g(x)=x-\sin x$ とおく．$x>0$ のとき $f(x)>0$，$g(x)>0$ を示す．$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，$f''(x)=-\sin x+x$，$f'''(x)=-\cos x+1$ である．$f'''(x)>0$ より $f''(x)$ は単調増加であり，$f''(0)=0$ だから $x>0$ のとき $f''(x)>0$ である．$f''(x)>0$ より $f'(x)$ は単調増加であり，$f'(0)=0$ だから $x>0$ のとき $f'(x)>0$ である．これより，$f(x)$ は $x>0$ のとき単調増加であり，$f(0)=0$ だから $x>0$ のとき $f(x)>0$ となる．

次に，$g'(x)=1-\cos x=f'''(x)$ であり，$x>0$ のとき $g'(x)>0$ である．これより，$g(x)$ は $x>0$ のとき単調増加であり，$g(0)=0$ だから $x>0$ のとき $g(x)>0$ となる．

問 5. (1)　運動する点 P の座標を $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ とすると $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t=-\dfrac{a}{b}y$，$\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}=b\cos t=\dfrac{b}{a}x$ だから

$$\overrightarrow{v}=\left(-\frac{a}{b}y,\ \frac{b}{a}x\right).$$

また，

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{\dot{y}^2}{b^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

である．

(2)　$\dot{x}$，$\dot{y}$ を t で微分すると

$$\ddot{x}=-\frac{a}{b}\,\dot{y}=-x, \qquad \ddot{y}=\frac{b}{a}\,\dot{x}=-y \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\alpha}=(-x,\,-y).$$

これより，$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=x^2+y^2$ である．

演習問題 **2**

1. (1) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\dfrac{1}{h}$．ここで，$\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\leqq|h|$ だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

である．これより，$f'(0)=0$ である．

(2) $x\neq 0$ のとき，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

(3) (1) と (2) より

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

である．これより

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

は発散である．$\lim_{x\to 0}f'(x)\neq f'(0)$ だから $f'(x)$ は $x=0$ で連続でない．

2. $f(x)$ が偶関数であるから $f(x)=f(-x)$ である．このとき，

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{f(-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}.\end{aligned}$$

ここで，$h=-k$ とすると，$h\to+0$ と $k\to-0$ は同値だから

$$f'_+(0)=\lim_{k\to-0}\frac{f(0+k)-f(0)}{-k}=-\lim_{k\to-0}\frac{f(0+k)-f(0)}{k}=-f'_-(0).$$

であり，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから $f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)$ である．これより，$f'(0)=0$ である．

3. 題意より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+\{f(a)-f(a-h)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}.\end{aligned}$$

ここで，$h=-k$ とすると，$h\to 0$ と $k\to 0$ は同値だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a)-f(a+k)}{-k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=f'(a)$$

となる．これより示された．

4.

(1)
$$\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{(1-\sqrt{x}\,)'(1+\sqrt{x}\,)-(1-\sqrt{x}\,)(1+\sqrt{x}\,)'}{(1+\sqrt{x}\,)^2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}\,)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}\,)}{(1+\sqrt{x}\,)^2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2} = -\frac{1}{4(1+\sqrt{x}\,)\sqrt{x(1-x)}}.$$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ より

$$\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{3(x+1)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

(3) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\,)^2}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\,)(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\,)} = \dfrac{\sqrt{1-x^4}-1}{x^2}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{1-x^4}-1}{x^2}\right)' = \frac{x^2(\sqrt{1-x^4}-1)'-2x(\sqrt{1-x^4}-1)}{x^4}$$
$$= \frac{-\frac{4x^5}{\sqrt{1-x^4}}-2x(\sqrt{1-x^4}-1)}{x^4} = \frac{2(\sqrt{1-x^4}-1\,)}{x^3\sqrt{1-x^4}}.$$

(4)
$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\sin x}{(1+\cos x)\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|(1+\cos x)}.$$

(5)
$$\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2+1}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'$$
$$= \frac{1-x}{1+x+(1-x)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$
$$= \frac{1-x}{4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

(6) $\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

(7) $\dfrac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=-\dfrac{1}{\cos 2x}$ より

$$\left(\frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}\right)'=-\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)'=\frac{(\cos 2x)'}{\cos^2 2x}=-\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

(8) $y=x^{x^x}$ とおき，対数をとると $\log y=x^x\log x$ である．両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=(x^x)'\log x+x^x\cdot\frac{1}{x}=x^x(\log x+1)\log x+x^{x-1}.$$

これより，$y'=x^{x^x}\{x^x(\log x+1)\log x+x^{x-1}\}$.

(9) $y=(\sin x)^{\sin^{-1}x}$ とおき，対数をとると $\log y=\sin^{-1}x\log\sin x$ である．両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}.$$

これより，$y'=(\sin x)^{\sin^{-1}x}\left(\dfrac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x\cdot\cot x\right)$.

5. (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

また，法線の方程式は

$$y-\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

(2) $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4a\,t}{(1+t^2)^2}$，$\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ より $t=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$x\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4a}{5},\qquad y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3a}{5},\qquad \dot{x}\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{27a}{25},\qquad \dot{y}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{36a}{25}.$$

これより接線の方程式は

$$y-\frac{3a}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{4a}{5}\right)\qquad\therefore\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{5a}{3}.$$

また，法線の方程式は

$$y-\frac{3a}{5}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4a}{5}\right)\qquad\therefore\quad y=\frac{3}{4}x.$$

(3)　$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3a(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ より $t=1$ のとき

$$x(1) = \frac{3a}{2}, \qquad y(1) = \frac{3a}{2}, \qquad \dot{x}(1) = -\frac{3a}{4}, \qquad \dot{y}(1) = \frac{3a}{4}.$$

これより接線の方程式は

$$y - \frac{3a}{2} = -\left(x - \frac{3a}{2}\right) \qquad \therefore \quad y = -x + 3a.$$

また，法線の方程式は

$$y - \frac{3a}{2} = x - \frac{3a}{2} \qquad \therefore \quad y = x.$$

6.　(1)　$y = \dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1} = x^2 - x + 1 - (x+1)^{-1}$ より，$y' = 2x - 1 - (-1)(x+1)^{-2}$，$y'' = 2 - (-1)(-2)(x+1)^{-3}$，$y''' = -(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$ だから $n \geqq 3$ に対して

$$y^{(n)} = -(-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-(n+1)} = -\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

となるから

$$y^{(n)} = \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2} & (n=1) \\ 2 - \frac{2}{(x+1)^3} & (n=2) \\ -\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} & (n \geqq 3) \end{cases}$$

である．

(2)　倍角の公式より $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ だから $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$ となる．2.2 節の例 1 (1) より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{3}{4}(\sin x)^{(n)} - \frac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)} \\ &= \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

(3)　$u = \cos x$，$v = x^3$ とおくと，$u^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2, , \dots)$，$v' = 3x^2$，$v'' = 6x$，$v''' = 6$，$v^{(n)} = 0$ $(n \geqq 4)$．ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= {}_nC_0 u^{(n)} v + {}_nC_1 u^{(n-1)} v' + {}_nC_2 u^{(n-2)} v'' + {}_nC_3 u^{(n-3)} v''' \\ &= x^3 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3nx^2 \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + 3n(n-1)x \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) + n(n-1)(n-2)\cos\left(x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right) \\ &= x^3 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3nx^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &\quad - 3n(n-1)x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n(n-1)(n-2)\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= x\{x^2 - 3n(n-1)\}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\{3x^2 - (n-1)(n-2)\}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &\qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

7. (1) $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$，$f''(x) = 2\cos 2x$，$f'''(x) = -4\sin 2x$，$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$ より 4 次までのマクローリン展開すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5(x) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + R_5(x).
\end{aligned}
$$

また，$f^{(5)}(x) = 16\sin 2x$ より剰余項 $R_5(x)$ は

$$R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 = \frac{2x^5}{15}\sin(2\theta x) \qquad (0 < \theta < 1).$$

(2) $f'(x) = \sinh x$，$f''(x) = \cosh x$，$f'''(x) = \sinh x$，$f^{(4)}(x) = \cosh x$ より 4 次までのマクローリン展開すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5(x).
\end{aligned}
$$

また，$f^{(5)}(x) = \sinh x$ より剰余項 $R_5(x)$ は

$$R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 = \frac{x^5}{120}\sinh(\theta x) \qquad (0 < \theta < 1).$$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ より $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x) = \dfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$，$f^{(4)}(x) = -\dfrac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$ より 4 次までのマクローリン展開すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5(x) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + R_5(x).
\end{aligned}
$$

また，$f^{(5)}(x) = \dfrac{105}{32}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$ より剰余項 $R_5(x)$ は

$$R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 = \frac{7x^5}{256(1+\theta x)^{\frac{9}{2}}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

8. (1) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となるから $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 1$ である．微分すると

$$\sqrt{1-x^2}f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) = 0$$

なので

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$$

となる．$u = f''(x)$，$v = 1-x^2$ とすると $u^{(n)} = f^{(n+2)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$，$v' = -2x$，$v'' = -2$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 3, 4, \dots)$ だから，ライプニッツの定理より

$$
\begin{aligned}
\{(1-x^2)f''(x)\}^{(n)} &= {}_nC_0 u^{(n)}v + {}_nC_1 u^{(n-1)}v' + {}_nC_2 u^{(n-2)}v'' \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x).
\end{aligned}
$$

同様にして

$$\{xf'(x)\}^{(n)} = {}_nC_0 xf^{(n+1)}(x) + {}_nC_1 f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$$

なので

$$\begin{aligned}
0 &= \{(1-x^2)f''(x)\}^{(n)} - \{xf'(x)\}^{(n)} \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) - \{xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)\} \\
&= (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

となり，与えられた式が示された．

(2)　(1) で $x=0$ とすると $f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0$ となるから

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0).$$

これを繰り返し用いる．n が偶数のとき，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (n-2)^2 f^{(n-2)}(0) = (n-2)^2(n-4)^2 f^{(n-4)}(0) \\
&= (n-2)^2(n-4)^2 \cdots 2^2 \cdot f^{(2)}(0)
\end{aligned}$$

ここで，$f^{(2)}(0) = 0$ だから $f^{(n)}(0) = 0$ となる．次に，n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (n-2)^2(n-4)^2 \cdots 1^2 \cdot f^{(1)}(0) \\
&= \left\{ \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n-1)(n-3)\cdots 2} \right\}^2 f^{(1)}(0) = \left\{ \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \right\}^2 f^{(1)}(0)
\end{aligned}$$

ここで，$f^{(1)}(0) = 1$ だから $f^{(n)}(0) = \left\{ \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \right\}^2$ となる．これより $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n : 偶数) \\ \left\{ \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \right\}^2 & (n : 奇数) \end{cases}$$

となる．

(3)　(2) より

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + R_6(x) \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + R_6(x)
\end{aligned}$$

となる．

9.　(1)　$f(x)$ を微分すると $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ となるから $(1+x^2)f'(x) = 1$ である．$u = f'(x)$，$v = 1+x^2$ とすると $u^{(n)} = f^{(n+1)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$，$v' = 2x$，$v'' = 2$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 3, 4, \ldots)$ だから，ライプニッツの定理より

$${}_nC_0 u^{(n)} v + {}_nC_1 u^{(n-1)} v' + {}_nC_2 u^{(n-2)} v'' = 0$$

$$\therefore \quad (1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nx\,f^{(n)}(x)+n(n-1)\,f^{(n-1)}(x)=0 \qquad (n \geqq 1)$$

(2)　(1) で $x=0$ とすると $f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0$ となるから

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

これを繰り返し用いる．n が偶数のとき，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0)&=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)\\
&=(-1)^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)f^{(n-4)}(0)\\
&=(-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3\cdot 2\cdot f^{(n-(n-2))}(0)
\end{aligned}$$

ここで，$f^{(2)}(0)=0$ だから $f^{(n)}(0)=0$ となる．次に，n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0)&=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)\\
&=(-1)^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)f^{(n-4)}(0)\\
&=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot f^{(n-(n-1))}(0)
\end{aligned}$$

ここで，$f^{(1)}(0)=1$ だから $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$ となる．これより $n=0,1,2,3,\ldots$ に対して

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & (n：\text{偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & (n：\text{奇数}) \end{cases}$$

(3)　(2) より

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{f'(0)}{1!}\,x+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5+R_6(x)\\
&=x-\frac{2!}{3!}\,x^3+\frac{4!}{5!}\,x^5+R_6(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+R_6(x).
\end{aligned}$$

10.

(1)　$$\begin{aligned}
P_1(x)&=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}(x^2-1)=x,\\
P_2(x)&=\frac{1}{2^2\cdot 2!}\,\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\,\frac{d}{dx}\{4x(x^2-1)\}=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\
P_3(x)&=\frac{1}{2^3\cdot 3!}\,\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3=\frac{1}{48}\,\frac{d^2}{dx^2}\{6x(x^2-1)^2\}=\frac{1}{8}\,\frac{d^2}{dx^2}(x^5-2x^3+1)\\
&=\frac{1}{8}\,\frac{d}{dx}(5x^4-6x^2+1)=\frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).
\end{aligned}$$

(2)　$y=(x^2-1)^n$ とすると $y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$ だから

$$(x^2-1)y'=2nx(y^2-1)^n=2nxy.$$

これを $(n+1)$ 回微分すると，ライプニッツの定理より

$$\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k(x^2-1)^{(k)}(y')^{(n+1-k)}=2n\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k\,x^{(k)}y^{(n+1-k)},$$

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+(n+1)ny^{(n)}=2nxy^{(n+1)}+2(n+1)ny^{(n)},$$
$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0,$$
$$\therefore\quad (x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

11. (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=1.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\log\dfrac{1-x}{e}}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\log(1-x)-\log e}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2x}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\cos^2x\cdot\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\sin^2x}.$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{\sin x}.$$

さらに，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{2}{(1-x)^3}}{\cos x}=-1,$$
$$\therefore\quad\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\sin^2x}=-\frac{1}{2}.$$

これより，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\log\dfrac{1-x}{e}}{\tan x-x}=-\frac{1}{2}.$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}'$. ここで，$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおき，対数をとると $\log y=\frac{1}{x}\log(1+x)$ である．両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}=\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}$$
$$\therefore\quad y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}$$

より

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}.$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}=-\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x(2+3x)}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+x)(2+6x)}=-\frac{1}{2}.$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}.$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x^b}{1-x^a}-\frac{b}{a}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x^b}{1-x^a}-\frac{b}{a}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1-x^b}{1-x^a}\right)'$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{x\to 1}\frac{bx^{b-1}(1-x^a)-ax^{a-1}(1-x^b)}{(1-x^a)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)x^{b-2}(1-x^a)-a(a-1)x^{a-2}(1-x^b)}{-2ax^{a-1}(1-x^a)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)x^{b-a-1}-a(a-1)x^{-1}-\{b(b-1)-a(a-1)\}x^{b-1}}{-2a(1-x^a)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)(b-a-1)x^{b-a-2}+a(a-1)x^{-2}-(b-1)\{b(b-1)-a(a-1)\}x^{b-2}}{2a^2x^{a-1}}\\
&=\frac{b(b-1)(b-a-1)+a(a-1)-(b-1)\{b(b-1)-a(a-1)\}}{2a^2}=-\frac{b(b-a)}{2a}.
\end{aligned}$$

(6) 対数をとり，不定形の極限値に変形してからロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
&\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2+1}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.
\end{aligned}$$

これより，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

12. (1) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ である．$f'(x)=0$ より $x=0$，$\pm\sqrt{3}$ である．$f''(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (>0) だから $f(\sqrt{3})$ は極小値，$f(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (<0) だから $f(-\sqrt{3})$ は極大値である．これより

極大値	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(x=-\sqrt{3}$ のとき$)$
極小値	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(x=\sqrt{3}$ のとき$)$

また，変曲点は $(0,0)$ で，$x<-1$ の範囲で $f''(x)<0$ なので $f(x)$ は上に凸，$-1<x<0$ の範囲で $f''(x)>0$ なので $f(x)$ は下に凸，$0<x<1$ の範囲で $f''(x)<0$ なので $f(x)$ は上に凸，$x>1$ の範囲で $f''(x)>0$ なので $f(x)$ は下に凸である．$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ より，漸近線 $y=x$，$x=\pm 1$ をもつ．また，

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to -1\pm 0}f(x)=\mp\infty$$

である．グラフの概形は教科書 182 頁を参照のこと．

(2)　$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$，$f''(x) = -4(1-x)e^{-2x}$ である．$f'(x) = 0$ より $x = \frac{1}{2}$ であり，$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{e}$ (<0) だから $f\left(\frac{1}{2}\right)$ は極大値である．これより

$$\text{極大値}\ \ \frac{1}{2e} \qquad \left(x = \frac{1}{2}\ \text{のとき}\right)$$

また，変曲点は $(1, e^{-2})$ で，$x < 1$ の範囲で $f''(x) < 0$ なので $f(x)$ は上に凸，$x > 1$ の範囲で $f''(x) > 0$ なので $f(x)$ は下に凸である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

である．グラフの概形は教科書 182 頁を参照のこと．

(3)　$3x - x^2 \geqq 0$ より定義域は $0 \leqq x \leqq 3$ である．$f'(x) = \dfrac{x(9-4x)}{2\sqrt{3x-x^2}}$，$f''(x) = \dfrac{x(27-36x+8x^2)}{4(3x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ であるから $f'(x) = 0$ より $x = 0, \frac{9}{4}$ である．$f''\left(\frac{9}{4}\right) = -2\sqrt{3}$ (<0) であるから $f\left(\frac{9}{4}\right)$ は極大値である．これより

$$\text{極大値}\ \ \frac{27\sqrt{3}}{16} \qquad \left(x = \frac{9}{4}\ \text{のとき}\right)$$

また，変曲点は $\left(\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}), \frac{9}{16}(3-\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}\,\right)$ で，$0 < x < \frac{3}{4}(3-\sqrt{3})$ の範囲で $f''(x) > 0$ なので $f(x)$ は下に凸，$\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}) < x < 3$ の範囲で $f''(x) < 0$ なので $f(x)$ は上に凸である．$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = 0$ より x 軸に接する．$\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f''(x) = -\infty$ より $x = 3$ に接する．グラフの概形は教科書 182 頁を参照のこと．

(4)　対数をとると $\log f(x) = x\log x$ である．両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1 \qquad \therefore\quad f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

であり，さらに微分すると $f''(x) = x^x(\log x+1)^2 + x^{x-1}$ である．$f'(x) = 0$ より $x = \frac{1}{e}$ である．$f''(e^{-1}) = e^{1-e^{-1}}$ (>0) だから $f(e^{-1})$ は極小値である．これより

$$\text{極小値}\ \ e^{-e^{-1}} \qquad (x = e^{-1}\ \text{のとき})$$

また，$x > 0$ の範囲で $f''(x) > 0$ なので $f(x)$ は下に凸である．$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ である．グラフの概形は教科書 182 頁を参照のこと．

13.　直円錐の半径を y，高さを x とすると $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ である．直円錐の体積を V とすると

$$V = \frac{\pi}{3}y^2x = \frac{\pi}{3}x\left\{r^2 - (x-r)^2\right\} = \frac{\pi}{3}x(2rx - x^2)$$

となる．$V' = \frac{\pi}{3}x(4r-3x)$，$V'' = \frac{2\pi}{3}(2r-3x)$ である．$V' = 0$ より $x = 0, \frac{4}{3}r$ であり，$0 < x < 2r$ より $x = \frac{4}{3}r$ であり，このとき，$V''\left(\frac{4}{3}r\right) = -\frac{4\pi}{3}r$ (<0) だから $V\left(\frac{4}{3}r\right)$ は極大値である．これより，体積が最大である直円錐の高さは $\frac{4}{3}r$ である．

14.　楕円の対称性より接点が第一象限にある場合を考える．接点を $(a\cos t, b\sin t)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とする．$y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$ より，接線の方程式は

$$y - b\sin t = -\frac{b\cos t}{a\sin t}(x - a\cos t) \qquad \therefore\quad \frac{\cos t}{a}x + \frac{\sin t}{b}y = 1$$

であるから $\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{\cos t}, 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0, \dfrac{b}{\sin t}\right)$ である．これより線分 AB の 2 乗を $\ell(t)$ とすると

$$\ell(t) = \frac{a^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2}{\sin^2 t}$$

であるから

$$\ell'(t) = \frac{2a^2 \sin t}{\cos^3 t} - \frac{2b^2 \cos t}{\sin^3 t} = \frac{2(a^2 \sin^4 t - b^2 \cos^4 t)}{\sin^3 t \cos^3 t},$$
$$\ell''(t) = \frac{2a^2(1 + 2\sin^2 t)}{\cos^4 t} + \frac{2b^2(1 + 2\cos^2 t)}{\sin^4 t} \ (> 0)$$

となる．$\ell''(t) > 0$ より，$\ell'(t) = 0$ を満たす t に対して $\ell(t)$ は極小値であり，$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より極小値は最小値である．$\ell'(t) = 0$ より $\tan^2 t = \frac{b}{a}$ である．このとき

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1 = \frac{a+b}{a}, \qquad \frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \cot^2 t = \frac{a+b}{b}$$

だから $\ell(t) = (a+b)^2$ となる．よって，線分 AB の長さの最小値は $a+b$ である．

15. (1) $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ とすると

$$f'(x) = \cos + \frac{1}{\cos^2 x} - 2, \qquad f''(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}(2 - \cos^3 x)$$

である．$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) > 0$ だから $f'(x)$ は単調増加である．$f'(0) = 0$ より $f'(x) > 0$ である．$f'(x) > 0$ だから $f(x)$ は単調増加であり，$f(0) = 0$ より $f(x) > 0$．よって，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x + \tan x > 2x$ である．

(2) $g(x) = \frac{1}{4}(\pi - x) - \tan^{-1}\sqrt{1-x}$ とすると

$$g'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}, \qquad g''(x) = \frac{4-3x}{4(2-x)(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

である．$0 < x < 1$ のとき，$g''(x) > 0$ だから $g'(x)$ は単調増加である．$g'(0) = 0$ より $g'(x) > 0$ である．$g'(x) > 0$ だから $g(x)$ は単調増加であり，$g(0) = 0$ より $g(x) > 0$．$g(1) = \frac{1}{4}(\pi - 1)$ より $g(x)$ は $x = 1$ で定義される．よって，$0 < x \leqq 1$ のとき $\frac{1}{4}(\pi - x) > \tan^{-1}\sqrt{1-x}$ である．

16. $\mathrm{OA} = x$，$\mathrm{OB} = y$，$\mathrm{AB} = z$ とすると余弦定理より $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$ である．t で微分すると $2z\dot{z} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} - 2(\dot{x}y + x\dot{y})\cos\theta$ だから

$$z\dot{z} = x(\dot{x} - \dot{y}\cos\theta) + y(\dot{y} - \dot{x}\cos\theta)$$

ここで，$\dot{x} = -v$，$\dot{y} = w$ より

$$z\dot{z} = -x(v + w\cos\theta) + y(w + v\cos\theta).$$

さらに，t で微分すると $\dot{z}^2 + z\ddot{z} = v^2 + w^2 + 2vw\cos\theta$ である．$\dot{z} = 0$ を満たす t に対して $z\ddot{z} = v^2 + w^2 + 2vw\cos\theta \ (> 0)$ より z は極小である．A 君が点 O に達するまで有限な時間であるから，$\dot{z} = 0$ を満たす t に対して z は最小である。これより

$$x(-v - w\cos\theta) + y(w + v\cos\theta) = 0 \qquad \therefore \ \frac{x}{y} = \frac{w + v\cos\theta}{v + w\cos\theta}.$$

17. 題意より $\tan\theta = -\frac{vt}{a}$ となる．両辺を t で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{a}$$

より

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{a}\cos^2\theta = -\frac{v}{a}\frac{1}{\tan^2\theta + 1} = -\frac{v}{a}\frac{1}{\frac{(vt)^2}{a^2} + 1} = -\frac{av}{a^2 + (vt)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{av}{\mathrm{AP}^2}.$$