第 2 章の章末問題

1.

(1) 微分係数の定義より，$f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\dfrac{1}{h}$ である．ここで，$\left|h\sin\dfrac{1}{h}\right|\leqq |\,h\,|$ なので，はさみうちの原理より $\lim_{h\to 0}h\sin\dfrac{1}{h}=0$ である．これより，$f'(0)=0$ である．

(2) $x\neq 0$ のとき $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$．

(3) (1) と (2) より

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

である．これより，$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ は発散する．$\lim_{x\to 0}f'(x)\neq f'(0)$ なので $f'(x)$ は $x=0$ で連続でない．

2. $f(x)$ が偶関数なので $f(x)=f(-x)$ である．このとき

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to +0}\frac{f(-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}.\end{aligned}$$

ここで，$h=-k$ とすると，$h\to +0$ と $k\to -0$ は同値なので

$$f'_+(0)=\lim_{k\to -0}\frac{f(0+k)-f(0)}{-k}=-\lim_{k\to -0}\frac{f(0+k)-f(0)}{k}=-f'_-(0)$$

であり，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能なので $f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)$ である．これより，$f'(0)=0$ である．

3. 題意より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+\{f(a)-f(a-h)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}.\end{aligned}$$

ここで，$h=-k$ とすると，$h\to 0$ と $k\to 0$ は同値なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a)-f(a+k)}{-k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=f'(a)$$

となる．これより示された．

4.

(1)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{(1-\sqrt{x}\,)'(1+\sqrt{x}\,)-(1-\sqrt{x}\,)(1+\sqrt{x}\,)'}{(1+\sqrt{x}\,)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}\,) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}\,)}{(1+\sqrt{x}\,)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2} = -\frac{1}{2(1+\sqrt{x}\,)\sqrt{x(1-x)}}.$$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ より

$$\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

(3) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\,)^2}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\,)(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\,)} = \dfrac{\sqrt{1-x^4}-1}{x^2}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{1-x^4}-1}{x^2}\right)' = \frac{x^2(\sqrt{1-x^4}-1)' - 2x(\sqrt{1-x^4}-1)}{x^4}$$

$$= \frac{-\frac{4x^5}{\sqrt{1-x^4}} - 2x(\sqrt{1-x^4}-1)}{x^4} = \frac{2(\sqrt{1-x^4}-1\,)}{x^3\sqrt{1-x^4}}.$$

(4) $$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{(1+\cos x)\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|(1+\cos x)}.$$

(5) $$\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2+1} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'$$

$$= \frac{1-x}{1+x+(1-x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{1-x}{4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

(6) $$\left(\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

(7) $\dfrac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x} = \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x} = -\dfrac{1}{\cos 2x}$ より

$$\left(\frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)' = \frac{(\cos 2x)'}{\cos^2 2x} = -\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

(8) $y = x^{x^x}$ とおき，対数をとると $\log y = x^x \log x$ である．両辺を x で微分すると問 6 (7) より

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= (x^x)' \log x + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\\ \therefore\quad y' &= x^{x^x}\{x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\}.\end{aligned}$$

(9) $y = (\sin x)^{\sin^{-1} x}$ とおき，対数をとると $\log y = \sin^{-1} x \log \sin x$ である．両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\\ \therefore\quad y' &= (\sin x)^{\sin^{-1} x}\left(\frac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \cdot \cot x\right).\end{aligned}$$

5.

(1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので，点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ における接線の方程式は $y - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ である．また，法線の方程式は $y - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ である．

(2) $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4a\,t}{(1+t^2)^2}$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ より，$t = \dfrac{1}{3}$ のとき $x\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4a}{5}$，$y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3a}{5}$，$\dot{x}\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{27a}{25}$，$\dot{y}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{36a}{25}$ である．これより接線の方程式は $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{5a}{3}$ である．また，法線の方程式は $y = \dfrac{3}{4}x$ である．

(3) $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3a(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ より，$t = 1$ のとき $x(1) = \dfrac{3a}{2}$，$y(1) = \dfrac{3a}{2}$，$\dot{x}(1) = -\dfrac{3a}{4}$，$\dot{y}(1) = \dfrac{3a}{4}$ である．これより接線の方程式は $y = -x + 3a$ である．また，法線の方程式は $y = x$ である．

6.

(1) $y = \dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1} = x^2 - x + 1 - (x+1)^{-1}$ より $y' = 2x - 1 - (-1)(x+1)^{-2}$，$y'' = 2 - (-1)(-2)(x+1)^{-3}$，$y''' = -(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$ なので $n \geqq 3$ に対して

$$y^{(n)} = -(-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-(n+1)} = -\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

より

$$y^{(n)} = \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2} & (n = 1)\\ 2 - \frac{2}{(x+1)^3} & (n = 2)\\ -\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} & (n \geqq 3)\end{cases}$$

である．

(2) 倍角の公式より $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ なので $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$ となる．2.2 節の例 1 (1) より

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= \frac{3}{4}(\sin x)^{(n)} - \frac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)}\\ &= \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).\end{aligned}$$

(3) $u=\cos x$，$v=x^3$ とおくと，$u^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n=1,2,,\dots)$，$v'=3x^2$，$v''=6x$，$v'''=6$，$v^{(n)}=0$ $(n \geqq 4)$．ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= {}_nC_0u^{(n)}v+{}_nC_1u^{(n-1)}v'+{}_nC_2u^{(n-2)}v''+{}_nC_3u^{(n-3)}v''' \\
&= x^3\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+3nx^2\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\
&\quad +3n(n-1)x\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)+n(n-1)(n-2)\cos\left(x+\frac{(n-3)\pi}{2}\right) \\
&= x^3\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+3nx^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&\quad -3n(n-1)x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-n(n-1)(n-2)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= x\{x^2-3n(n-1)\}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\{3x^2-(n-1)(n-2)\}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&\qquad (n=1,2,3,\dots)
\end{aligned}$$

7.

(1) $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，$f''(x)=2\cos 2x$，$f'''(x)=-4\sin 2x$，$f^{(4)}(x)=-8\cos 2x$ より 4 次までのマクローリン展開すると $f(x)=x^2-\dfrac{x^4}{3}+R_5(x)$ である．また，$f^{(5)}(x)=16\sin 2x$ より剰余項は $\theta\in(0,1)$ に対して $R_5(x)=\dfrac{2x^5}{15}\sin(2\theta x)$ である．

(2) $f'(x)=\sinh x$，$f''(x)=\cosh x$，$f'''(x)=\sinh x$，$f^{(4)}(x)=\cosh x$ より 4 次までのマクローリン展開すると $f(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_5(x)$ である．また，$f^{(5)}(x)=\sinh x$ より剰余項は $\theta\in(0,1)$ に対して $R_5(x)=\dfrac{x^5}{120}\sinh(\theta x)$ である．

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ なので，$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x)=\dfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$，$f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$ より 4 次までのマクローリン展開すると $f(x)=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\dfrac{5x^4}{128}+R_5(x)$ である．また，$f^{(5)}(x)=\dfrac{105}{32}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$ より剰余項は $\theta\in(0,1)$ に対して $R_5(x)=\dfrac{7x^5}{256(1+\theta x)^{\frac{9}{2}}}$ である．

8.

(1) $f(x)$ を微分すると $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ より $(1+x^2)f'(x)=1$ である．$u=f'(x)$，$v=1+x^2$ とすると $u^{(n)}=f^{(n+1)}(x)$ $(n=0,1,2,\dots)$，$v'=2x$，$v''=2$，$v^{(n)}=0$ $(n=3,4,\dots)$ なので，ライプニッツの定理より $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nx\,f^{(n)}(x)+n(n-1)\,f^{(n-1)}(x)=0$ $(n\geqq 1)$ である．

(2) (1) で $x=0$ とすると $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ である．これを繰り返し用いる．n が偶数のとき，

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots3\cdot2\cdot f^{(n-(n-2))}(0)$$

ここで，$f^{(2)}(0)=0$ なので $f^{(n)}(0)=0$ となる．次に，n が奇数のとき，

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots3\cdot2\cdot1\cdot f^{(n-(n-1))}(0)$$

ここで，$f^{(1)}(0)=1$ なので $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$ となる．これより $n=0,1,2,3,\dots$ に対して

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & (n：偶数) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & (n：奇数) \end{cases}$$

(3) (2) より $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+R_6(x)$ である．

9.

(1) $y=g(x)$ より $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$，$y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$，$y'''=\dfrac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}$ なので

$$2y'y'''-3(y'')^2=\frac{12c^2(ad-bc)^2}{(cx+d)^6}-\frac{12c^2(ad-bc)^2}{(cx+d)^6}=0$$

となる．これより，$S\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=0$ が成り立つ．

(2) $z=g(y)=\dfrac{ay+b}{cy+d}$ より $z'=\dfrac{(ad-bc)y'}{(cy+d)^2}$，$z''=\dfrac{(ad-bc)\{y''(cy+d)-2c(y')^2\}}{(cy+d)^3}$，

$z'''=\dfrac{(ad-bc)\{(cy+d)^2y'''-6c(cy+d)y'y''+6c^2(y')^3\}}{(cy+d)^4}$ なので

$$2z'z'''-3(z'')^2=\frac{(ad-bc)^2\{2y'y'''-3(y'')^2\}}{(cy+d)^4}=\{2y'y'''-3(y'')^2\}\left(\frac{z'}{y'}\right)^2.$$

これより

$$S\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}=\frac{2z'z'''-3(z'')^2}{2(z')^2}=\frac{2y'y'''-3(y'')^2}{2(y')^2}=S\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

10.

(1) $P_1(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(x^2-1)=x$，

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\{4x(x^2-1)\}=\frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2^3\cdot 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3=\frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}\{6x(x^2-1)^2\}=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^5-2x^3+1) \\ &= \frac{1}{8}\frac{d}{dx}(5x^4-6x^2+1)=\frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x). \end{aligned}$$

(2) $y=(x^2-1)^n$ とすると $y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$ なので $(x^2-1)y'=2nx(y^2-1)^n=2nxy$ である．これを $(n+1)$ 回微分すると，ライプニッツの定理より

$$\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k(x^2-1)^{(k)}(y')^{(n+1-k)}=2n\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k\,x^{(k)}y^{(n+1-k)},$$

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0,$$

$$\therefore\quad (x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

11.

(1) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x} = 1.$

(2) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x - \sec x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x} = 0.$

(3) ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^x + \log\dfrac{1-x}{e}}{\tan x - x} &= \lim_{x\to0}\frac{e^x + \log(1-x) - \log e}{\tan x - x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}\\ &= \lim_{x\to0}\cos^2 x\cdot\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\sin x}.$$

さらに，ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{2}{(1-x)^3}}{\cos x} = -1$ なので，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

これより，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x + \log\dfrac{1-x}{e}}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}.$$

(4) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}'.$$

ここで，$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおき，対数をとると $\log y = \frac{1}{x}\log(1+x)$ である．両辺を x で微分すると $\displaystyle\frac{y'}{y} = \frac{-(1+x)\log(1+x) + x}{x^2(1+x)}$ なので

$$y' = (1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\log(1+x) + x}{x^2(1+x)}$$

より

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\log(1+x) + x}{x^2(1+x)}.$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{-(1+x)\log(1+x) + x}{x^2(1+x)} = -\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x(2+3x)} = -\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+x)(2+6x)} = -\frac{1}{2}.$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ より

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

(5) 不定形の極限値に変形して，繰り返しロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x^b}{1-x^a}-\frac{b}{a}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x^b}{1-x^a}-\frac{b}{a}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1-x^b}{1-x^a}\right)'\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{bx^{b-1}(1-x^a)-ax^{a-1}(1-x^b)}{(1-x^a)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)x^{b-2}(1-x^a)-a(a-1)x^{a-2}(1-x^b)}{-2ax^{a-1}(1-x^a)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)x^{b-a-1}-a(a-1)x^{-1}-\{b(b-1)-a(a-1)\}x^{b-1}}{-2a(1-x^a)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{b(b-1)(b-a-1)x^{b-a-2}+a(a-1)x^{-2}-(b-1)\{b(b-1)-a(a-1)\}x^{b-2}}{2a^2x^{a-1}}\\
&=\frac{b(b-1)(b-a-1)+a(a-1)-(b-1)\{b(b-1)-a(a-1)\}}{2a^2}\\
&=-\frac{b(b-a)}{2a}.
\end{aligned}$$

(6) 対数をとり，不定形の極限値に変形してからロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
&\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2+1}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.
\end{aligned}$$

これより，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}=1$ である．

12.

(1) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ である．$f'(x)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$ であり，$f''(0)=0$ なので $(0,0)$ は変曲点である．また，$f''(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ (>0)$ なので $f(\sqrt{3})$ は極小値，$f(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ (<0)$ なので $f(-\sqrt{3})$ は極大値である．これより

極大値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=-\sqrt{3}$ のとき$)$

極小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=\sqrt{3}$ のとき$)$

次に，$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ より，漸近線 $y=x$，$x=\pm 1$ をもつ．また，

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to -1\pm 0}f(x)=\mp\infty$$

である．グラフの概形は省略する．

(2) $f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$，$f''(x)=-4(1-x)e^{-2x}$ である．$f'(x)=0$ より $x=\frac{1}{2}$ であり，$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{e}\ (<0)$ なので $f\left(\frac{1}{2}\right)$ は極大値である．これより

極大値 $\dfrac{1}{2e}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\ のとき\right)$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ である．グラフの概形は省略する．

(3) $3x-x^2 \geqq 0$ より定義域は $0 \leqq x \leqq 3$ である．$f'(x) = \dfrac{x(9-4x)}{2\sqrt{3x-x^2}}$，$f''(x) = \dfrac{x(27-36x+8x^2)}{4(3x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ なので，$f'(x)=0$ より $x=0, \frac{9}{4}$ である．$f''\left(\frac{9}{4}\right) = -2\sqrt{3}\ (<0)$ より $f\left(\frac{9}{4}\right)$ は極大値である．これより

$$\text{極大値}\quad \frac{27\sqrt{3}}{16} \qquad \left(x = \frac{9}{4}\ \text{のとき}\right)$$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = 0$ より x 軸に接する．$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f''(x) = -\infty$ より $x=3$ に接する．グラフの概形は省略する．

(4) 対数をとると $\log f(x) = x\log x$ である．両辺を x で微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1$ より $f'(x) = x^x(\log x+1)$ であり，さらに微分すると $f''(x) = x^x(\log x+1)^2 + x^{x-1}$ である．$f'(x)=0$ より $x=\frac{1}{e}$ である．$f''(e^{-1}) = e^{1-e^{-1}}\ (>0)$ なので $f(e^{-1})$ は極小値である．これより

$$\text{極小値}\quad e^{-e^{-1}} \qquad (x = e^{-1}\ \text{のとき})$$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ である．グラフの概形は省略する．

13. 直円錐の半径を y，高さを x とすると $(x-r)^2+y^2=r^2$ である．直円錐の体積を V とすると $V = \dfrac{\pi}{3}y^2x = \dfrac{\pi}{3}x(2rx-x^2)$ となる．$V' = \dfrac{\pi}{3}x(4r-3x)$，$V'' = \dfrac{2\pi}{3}(2r-3x)$ である．$V'=0$ より $x=0, \dfrac{4}{3}r$ であり，$0<x<2r$ より $x=\dfrac{4}{3}r$ であり，このとき，$V''\left(\dfrac{4}{3}r\right) = -\dfrac{4\pi}{3}r\ (<0)$ なので $V\left(\dfrac{4}{3}r\right)$ は極大値である．これより，体積が最大である直円錐の高さは $\dfrac{4}{3}r$ である．

14. 楕円の対称性より接点が第一象限にある場合を考える．接点を $(a\cos t, b\sin t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．$y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$ より，接線の方程式は $\dfrac{\cos t}{a}x + \dfrac{\sin t}{b}y = 1$ であるから A $\left(\dfrac{a}{\cos t}, 0\right)$, B $\left(0, \dfrac{b}{\sin t}\right)$ である．これより線分 AB の 2 乗を $\ell(t)$ とすると $\ell(t) = \dfrac{a^2}{\cos^2 t} + \dfrac{b^2}{\sin^2 t}$ であるから

$$\ell'(t) = \frac{2(a^2\sin^4 t - b^2\cos^4 t)}{\sin^3 t\cos^3 t}, \qquad \ell''(t) = \frac{2a^2(1+2\sin^2 t)}{\cos^4 t} + \frac{2b^2(1+2\cos^2 t)}{\sin^4 t}$$

となる．$\ell''(t) > 0$ より，$\ell'(t)=0$ を満たす t に対して $\ell(t)$ は極小値であり，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より極小値は最小値である．$\ell'(t)=0$ より $\tan^2 t = \dfrac{b}{a}$ である．このとき，$\dfrac{1}{\cos^2 t} = \dfrac{a+b}{a}$，$\dfrac{1}{\sin^2 t} = \dfrac{a+b}{b}$ なので $\ell(t) = (a+b)^2$ となる．よって，線分 AB の長さの最小値は $a+b$ である．

15.

(1) $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ とすると $f'(x) = \cos + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2$，$f''(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}(2-\cos^3 x)$ である．$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)>0$ なので $f'(x)$ は単調増加である．$f'(0)=0$ より $f'(x)>0$ である．$f'(x)>0$ なので $f(x)$ は単調増加であり，$f(0)=0$ より $f(x)>0$．よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin x + \tan x > 2x$ である．

(2) $g(x) = \dfrac{1}{4}(\pi - x) - \tan^{-1}\sqrt{1-x}$ とすると $g'(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$ であり，$g''(x) = \dfrac{4-3x}{4(2-x)(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ である．$0<x<1$ のとき，$g''(x)>0$ なので $g'(x)$ は単調増加である．$g'(0)=0$ より $g'(x)>0$ である．$g'(x)>0$ なので $g(x)$ は単調増加であり，$g(0)=0$ より

$g(x) > 0$．$g(1) = \dfrac{1}{4}(\pi - 1)$ より $g(x)$ は $x = 1$ で定義される．よって，$0 < x \leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{4}(\pi - x) > \tan^{-1}\sqrt{1-x}$ である．

16.　$\mathrm{OA} = x$，$\mathrm{OB} = y$，$\mathrm{AB} = z$ とすると余弦定理より $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$ である．t で微分すると $2z\dot{z} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} - 2(\dot{x}y + x\dot{y})\cos\theta$ なので $z\dot{z} = x(\dot{x} - \dot{y}\cos\theta) + y(\dot{y} - \dot{x}\cos\theta)$ である．ここで，$\dot{x} = -v$，$\dot{y} = w$ より $z\dot{z} = -x(v + w\cos\theta) + y(w + v\cos\theta)$．さらに，$t$ で微分すると $\dot{z}^2 + z\ddot{z} = v^2 + w^2 + 2vw\cos\theta$ である．$\dot{z} = 0$ を満たす t に対して $z\ddot{z} = v^2 + w^2 + 2vw\cos\theta\ (> 0)$ より z は極小である．A 君が点 O に達するまで有限な時間であるから，$\dot{z} = 0$ を満たす t に対して z は最小である．これより $\dfrac{x}{y} = \dfrac{w + v\cos\theta}{v + w\cos\theta}$ である．

17.　題意より $\tan\theta = -\dfrac{vt}{a}$ となる．両辺を t で微分すると $\dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{v}{a}$ より

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{a}\cos^2\theta = -\frac{v}{a}\frac{1}{\tan^2\theta + 1} = -\frac{v}{a}\frac{1}{\frac{(vt)^2}{a^2} + 1} = -\frac{av}{a^2 + (vt)^2}$$

となる．これより，$\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{av}{\mathrm{AP}^2}$ なので $\dfrac{d\theta}{dt}$ は線分 AP の長さの 2 乗に反比例する．