2.3 微分の応用

問 1.

(1) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2}{5^x\log 5}=\frac{\log 2}{\log 5}$.

(2) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0$.

(3) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6}=-\frac{1}{6}.$$

(4) 対数をとると 2.3 節の例 1 (4) より

$$\log\left(\lim_{x\to+0}x^x\right)=\lim_{x\to+0}\log x^x=\lim_{x\to+0}x\log x=0 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to+0}x^x=1.$$

(5) 不定形の極限値に変形してロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.\end{aligned}$$

(6) 対数をとることで不定形の極限値に変形してからロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\log\left\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right\} &= \lim_{x\to 0}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x+b^x)'}{a^x+b^x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

これより

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}.$$

問 2.

(1) $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$，$f''(x)=-\dfrac{4(x^3-3x-1)}{(x^2+x+1)^3}$ である．$f'(x)=0$ より $x=\pm 1$ であり，$f''(1)=\frac{4}{9}$ (>0) なので $f(1)$ は極小値である．また，$f''(-1)=-4$ (<0) なので $f(-1)$ は極大値である．これより，

極大値　3　　　$(x=-1$ のとき$)$

極小値　$\frac{1}{3}$　　　$(x=1$ のとき$)$

(2) 定義域は $-1 \leqq x \leqq 1$ である．これより $g(x)$ は最大値及び最小値をもつ．

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g''(x) = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

である．$g'(x) = 0$ より $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$g''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\sqrt{3}\ (<0)$ なので $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は極大値である．また，$g''\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\ (>0)$ なので $g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は極小値である．これより，

$$\begin{aligned} &\text{最大値}\quad \sqrt{3} - \tfrac{\pi}{3} && \left(x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{のとき}\right) \\ &\text{最小値}\quad -\sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3} && \left(x = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{のとき}\right) \end{aligned}$$

問 3.

(1) 半径 r の球に内接する直円柱の高さを $2x\ (0 < x < r)$ とすると，直円柱の底面の円の半径は $\sqrt{r^2 - x^2}$ である．これより，直円柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 2x = 2\pi(r^2x - x^3)$$

となる．$V'(x) = 2\pi(r^2 - 3x^2)$，$V''(x) = -12\pi x$ である．$V'(x) = 0$ より $x = \pm\frac{r}{\sqrt{3}}$ であり，$0 < x < r$ より $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ である。このとき，$V''\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = -4\sqrt{3}\pi r\ (<0)$ だから $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ は極大値である．$V(0) = V(r) = 0$ より $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ は最大値である．これより，求める最大値は $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$ である．

(2) 定点 A を通る直線の傾きを m とすると，題意から $m < 0$ である．直線の方程式は $y - b = m(x - a)$ より，x と y 軸との交点の座標はそれぞれ $\left(a - \frac{b}{m}, 0\right)$，$(0, b - am)$ である．これより，線分の長さの 2 乗 $\ell(m)$ は $\ell(m) = \left(a - \frac{b}{m}\right)^2 + (b - am)^2 = (b - am)^2\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$ だから

$$\ell'(m) = -2(b - am)\left(a + \frac{b}{m^3}\right), \qquad \ell''(m) = 2\left(a^2 - \frac{2ab}{m^3} + \frac{3b^2}{m^4}\right)$$

となる．$\ell'(m) = 0$，$m < 0$ より $m = -\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ である．このとき，

$$\ell''\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 3a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\ (>0)$$

なので $\ell\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ は極小値である．これより，$\ell\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ なので，求める最小値は $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ である．

問 4. $f(x) = e^{-x} + x - 1$，$g(x) = -e^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2}$ とおく．$x > 0$ のとき $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ を示す．$f'(x) = -e^{-x} + 1$，$f''(x) = e^{-x}$ である．$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調増加であり，$f'(0) = 0$ なので $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ である．これより，$f(x)$ は $x > 0$ のとき単調増加であり，$f(0) = 0$ なので $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となる．次に，$g'(x) = e^{-x} - 1 + x = f(x)$ であり，$x > 0$ のとき $g'(x) > 0$ である．これより，$g(x)$ は $x > 0$ のとき単調増加であり，$g(0) = 0$ だから $x > 0$ のとき $g(x) > 0$ となる．

問 5.

(1) 運動する点 P の座標を $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ とすると $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = -a\sin t = -\dfrac{a}{b}\,y$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = b\cos t = \dfrac{b}{a}\,x$ なので $\overrightarrow{v} = \left(-\dfrac{a}{b}\,y,\ \dfrac{b}{a}\,x\right)$ である．また，$\dfrac{\dot{x}^2}{a^2} + \dfrac{\dot{y}^2}{b^2} = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ である．

(2) $\dot{x}$，$\dot{y}$ を t で微分すると $\ddot{x} = -\dfrac{a}{b}\,\dot{y} = -x$，$\ddot{y} = \dfrac{b}{a}\,\dot{x} = -y$ なので，$\overrightarrow{\alpha} = (-x,\ -y)$ である．これより，$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = x^2 + y^2$ である．