1　極限

1.1　数列と級数

1.2　連続関数

演習問題 1

1.1　数列と級数

問 1　$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$, $-|\beta| \leqq \beta \leqq |\beta|$ より，$-(|\alpha|+|\beta|) \leqq \alpha+\beta \leqq |\alpha|+|\beta|$ が成り立つ．したがって，$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$ を得る．なお，α と β の少なくとも一方が 0 であるか，または α, β が同符号であるとき等号が成立する．

また，三角不等式より，$|\alpha| = |(\alpha-\beta)+\beta| \leqq |\alpha-\beta|+|\beta|$ であるから，$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$ を得る．同様に，α と β を入れ替えると，$|\beta| = |(\beta-\alpha)+\alpha| \leqq |\beta-\alpha|+|\alpha| = |\alpha-\beta|+|\alpha|$ となるので，$|\beta|-|\alpha| \leqq |\alpha-\beta|$ が成り立つ．以上より，$-|\alpha-\beta| \leqq |\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$ であるから，$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqq |\alpha-\beta|$ を得る．なお，α と β の少なくとも一方が 0 であるか，または α, β が同符号のとき等号が成立する．

問 2　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，$n > N$ なる任意の自然数 n に対し $|a_n-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．ここで，問 1 より $\big||a_n|-|\alpha|\big| \leqq |a_n-\alpha|$ であるから，$n > N$ ならば $\big||a_n|-|\alpha|\big| < \varepsilon$ となる．したがって，極限の定義より，$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\alpha|$ である．

問 3　(1)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-0\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0$

より，数列の極限値の定義から $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0.$ よって，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{n+1}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\} = 0+0 = 0.$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^2+n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1-0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

(3)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-1}{3n^3+2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}} = \frac{0+0-0}{3+0-0} = \frac{0}{3} = 0.$$

(4)　$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} == \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

(5)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4}-2)(\sqrt{n+4}+2)}{n(\sqrt{n+4}+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)-2^2}{n(\sqrt{n+4}+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(\sqrt{n+4}+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}+2} = 0.$$

(6)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right\} = \sqrt{1+0}+1 = 2.$$

問 4　$\sqrt[n]{n} \geqq 1$ であるから，$\sqrt[n]{n} = 1+h_n$ $(h_n \geqq 0)$ とおく．このとき，$n = (1+h_n)^n$ である．ここで，二項定理より

$$(1+h_n)^n = 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots \geqq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geqq 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

となる．したがって，$n \geqq 1+\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$ であるから，$n-1 \geqq \dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$ を得る．さらに，$n \geqq 2$ のとき $n-1 > 0$ であるから，両辺を $\dfrac{n(n-1)}{2}$ で割って $h_n^2 \leqq \dfrac{2}{n}$ となる．しかも $h_n \geqq 0$ であるから，$0 \leqq h_n \leqq \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ を得る．ここで，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle \lim_{n\to\infty} h_n = 0$ となる．以上より，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+h_n) = 1$ である．

問 5　(1)　$\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1$.

(2)　$n \geqq 3$ としてよい．例 7 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!} = 0$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!}\cdot\frac{1}{(1-\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})} = 0\cdot 1 = 0.$$

(3)　例 3 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$，問 4 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = 1$.

(4)　$\displaystyle\sqrt[n]{3^{n+1}+5^n} = \sqrt[n]{5^n\left(\frac{3^{n+1}}{5^n}+1\right)} = 5\sqrt[n]{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}$．$\displaystyle 0 < \left(\frac{3}{5}\right)^n < 1$ より，$\displaystyle 1 < 3\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 < 4$.
さらに，$\displaystyle 5 < 5\sqrt[n]{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+1} < 5\sqrt[n]{4}$．例 3 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{4} = 5$ だから，はさみうちの原理より
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n+1}+5^n} = 5$.

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-5)^{n+1}}{(-3)^n+(-5)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(-5)^n}-5}{\frac{(-3)^n}{(-5)^n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{-5}\right)^n-5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1} = \frac{3\cdot 0-5}{0+1} = -5.$$

(6)　任意の k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ に対して $\displaystyle 0 < \frac{k}{n} \leqq 1$ なので，$\displaystyle 0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right) \leqq \frac{1}{n}$.
このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$.

問 6　(1)　数列 $\displaystyle\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right\}$ は数列 $\displaystyle\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の部分列である．よって，定理 6 より，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = e$.

(別解)　$m = 3n$ とおくと，$n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\} = e\cdot e = e^2.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} = e\cdot 1^{-1} = e.$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\} = e\cdot 1^{-1} = e.$$

(5)　数列 $\displaystyle\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ は数列 $\displaystyle\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の部分列なので，例 12(1) より
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\}$$
$$= e^{-1}\cdot 1^{-1} = e^{-1}.$$

(別解)　$m=n+1$ とおくと,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-1}\right\}$$
$$=e^{-1}\cdot 1^{-1}=e^{-1}.$$

(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}=e^{-1}\cdot e=1.$（例 12(2) を参照のこと）

問 7　仮定より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数 N_0,N_1 が存在し，

$$n>N_0\Rightarrow|a_{2n-1}-\alpha|<\varepsilon,\qquad n>N_1\Rightarrow|a_{2n}-\alpha|<\varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$N=2\cdot\max\{N_0,N_1\}+1$ とおく．$n>N$ なる任意の自然数 n をとると，n は奇数または偶数であるから，ある自然数 m を用いて $n=2m-1$ または $n=2m$ と書ける．このとき，$n>N=2\cdot\max\{N_0,N_1\}+1$ であることから，いずれの場合にも $m>\max\{N_0,N_1\}$ なので，$n=2m-1$ のときは $|a_n-\alpha|=|a_{2m-1}-\alpha|<\varepsilon$, $n=2m$ のときは $|a_n-\alpha|=|a_{2m}-\alpha|<\varepsilon$ となる．

ゆえに，$n>N$ なる任意の自然数 n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ．よって，数列の極限の定義より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ である．

（備考）教科書 p.177 にある $N=\max\{N_0,N_1\}$ は，$N=2\cdot\max\{N_0,N_1\}+1$ に訂正してください．

問 8　(1)　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\to 2\cdot\frac{1}{2}=1\ (n\to\infty)$ より，級数は収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1.$

(2)　$\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ より，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty).$$

よって，収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=-1\neq 0$ なので，定理 7(1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n}$ は発散する．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty\neq 0$ なので，定理 7(1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}$ は発散する．

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0$ なので，定理 7(1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n-4}$ は発散する．

(6)　$\displaystyle\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$ より，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}\to 1\quad(n\to\infty).$$

よって，収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1.$

(7)　例 6 より数列 $a_n = \{(-1)^n\}$ は発散するので，定理 7(1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ は発散する．

(8)　$\dfrac{6}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n+1} + \dfrac{1}{n+3} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}\right)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)\right\}.$$

そこで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$ について考える．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \to \frac{5}{6} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{6}$．以上より，問題の級数は収束し，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)\right\} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = 2 \cdot 1 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

(注意) はじめの式変形は有理関数の部分分数分解である．定式化された求め方は pp.66-67 を参照のこと．

(9)　$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ なので，

$\dfrac{-n+2}{n^3+3n^2+2n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n+1} + \dfrac{2}{n+2} = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) - 2\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n+2}{n^3+3n^2+2n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

ここで，問 8(2) より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n+2}{n^3+3n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$

(注意) 二番目のはじめの式変形は有理関数の部分分数分解である．詳しくは pp.66-67 を参照のこと．

1.2 連続関数

問 1 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{9}}=\sqrt{2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{0}{4}=0.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-4}=\frac{12}{-6}=-2.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}.$

(5)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2-0}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}=\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}\right)\\
&=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3-2^3}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2-0}\left(\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)=\sqrt[3]{8}^{\,2}+2\sqrt[3]{8}+4=2^2+2\cdot 2+4=12.
\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(x-2)}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{2(x-2)}=\frac{1}{2\cdot(0-2)}=-\frac{1}{4}.$

問 2 (1) $(x^2-4)^2=\{(x-2)(x+2)\}^2\to 0\ (x\to 2)$ で，$x\neq 2$ では分母は正なので，$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^2-4)^2}=\infty.$

(注意) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}$ は発散し，∞ ではない．

(2) $x\to 3-0$ のとき $3-x\to +0$ なので，$\sqrt{3-x}\to +0$．また，$2x\to 6>0$．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{2x}{\sqrt{3-x}}=\infty.$

(3)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}-3}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2+9-9}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{3}{x}\right)=1.
\end{aligned}$$

(別解) $0<x\to\infty$ に注意して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-\frac{3}{x}}=\frac{1}{\sqrt{1}-0}=1.$

(4) $y=-x$ とおくと，$x\to -\infty$ のとき $y\to\infty$．よって，

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{y\to\infty}\frac{-y}{|-y|}=\lim_{y\to\infty}\frac{-y}{y}=\lim_{y\to\infty}-1=-1.$$

(5) $y=-x$ とおくと，$x\to -\infty$ のとき $y\to\infty$．よって，

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(x-3)^2}{x^3}=\lim_{y\to\infty}\frac{(-y-3)^2}{-y^3}=\lim_{y\to\infty}\frac{(y+3)^2}{-y^3}=\lim_{y\to\infty}-\frac{1}{y}\cdot\left(1+\frac{3}{y}\right)^2=0\cdot 1^2=0.$$

(6) $y=-x$ とおくと，$x\to -\infty$ のとき $y\to\infty$．よって，$y>0$ としてよいことに注意して，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\infty}x(x+\sqrt{x^2-3})=\lim_{y\to\infty}-y(-y+\sqrt{y^2-3})=\lim_{y\to\infty}y(y-\sqrt{y^2-3})\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{y(y-\sqrt{y^2-3})(y+\sqrt{y^2+3})}{y+\sqrt{y^2-3}}=\lim_{y\to\infty}\frac{3y}{y+\sqrt{y^2-3}}=\lim_{y\to\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{y^2}}}=\frac{3}{1+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

問 3 (1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right\}^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}.$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2 = e^2.$

(3) $\displaystyle 1+\frac{1}{\sqrt{x}} > 1$ なので，$n \leqq x < n+1$ のとき，

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x.$$

ここで n は自然数なので，二項定理より，

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{\sqrt{x}}.$$

さらに，$x-1<n$ より，

$$1+\frac{n}{\sqrt{x}} > 1+\frac{x-1}{\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty\ (x\to\infty).$$

よって，$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \infty.$

(4) $y=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$．よって，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3y} = \lim_{y\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^{-3} = e^{-3}.$$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を用いる（例 6(2)）．$y=-x$ とおくと $x\to 0$ のとき $y\to 0$ で，

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1+3y)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}(1+3y)^{-\frac{3}{3y}} = \lim_{y\to 0}\left\{(1+3y)^{\frac{1}{3y}}\right\}^{-3} = e^{-3}.$$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\{(1-2x)(1+2x)\}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1-2x)^{\frac{1}{2x}}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2 = \left(e^{-1}\cdot e\right)^2 = 1.$

問 4 $a=1$ のときは，$x=1$ とすれば $x^n=a$ である．一意性は明らか．

$0<a<1$ のとき，$f(x)=x^n-a$ とおく．このとき，f は閉区間 $[0,1]$ で連続であり，

$$f(0)=-a<0, \qquad f(1)=1-a>0$$

である．よって，中間値の定理より，$f(c)=0$ を満たす $c\in(0,1)$ が存在する．したがって，$c^n=a$ であるから，$x=c$ とおけば $x^n=a$ となる．さらに，$f(x)=x^n-a$ は $x\geqq 0$ において狭義単調増加であるから，$f(c)=0$ を満たす $c>0$ はただ一つである．したがって，$x^n=a$ を満たす正の実数 x はただ一つである．

$a>1$ のときは，$0<\dfrac{1}{a}<1$ であるから，すでに示したことより，$c^n=\dfrac{1}{a}$ を満たす正の実数 c がただ一つ存在する．ここで，$x=\dfrac{1}{c}$ とおけば，$x^n=\left(\dfrac{1}{c}\right)^n=\dfrac{1}{c^n}=a$ となるので，$x^n=a$ を満たす正の実数 x が存在する．また，$y>0$ も $y^n=a$ を満たすとすると，$\left(\dfrac{1}{y}\right)^n=\dfrac{1}{a}$ であり，$\dfrac{1}{a}$ に対する正の n 乗根の一意性より，$\dfrac{1}{y}=c$．したがって，$y=\dfrac{1}{c}=x$ である．よって，この場合も $x^n=a$ を満たす正の実数 x はただ一つである．

問 5 (1) $5^{\log_5 26}+e^{\log 10}=26+10=36.$

(2) $\displaystyle \log_2 3+\log_2 6-\log_2 9=\log_2\frac{3\times 6}{9}=\log_2 2=1.$

(3) $\displaystyle \log_3 10-\log_3 5-\log_3 6=\log_3\frac{10}{5\times 6}=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1.$

(4) $\log_{16}\sqrt{32}+\dfrac{\log_{12}27}{\log_{12}3}=\dfrac{\log_2\sqrt{32}}{\log_2 16}+\log_3 27=\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 2^5}{\log_2 2^4}+\log_3 3^3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{4}+3=\dfrac{29}{8}.$

問 6 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\log(1+2x)=\lim_{x\to 0}4\left\{\frac{1}{2x}\log(1+2x)\right\}=4\cdot 1=4.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{-2\cdot\frac{1}{-2x}\log(1-2x)\right\}=-2\cdot 1=-2.$

(別解) $y=-x$ とおけば，$x\to 0$ のとき $y\to 0$．よって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+2y)}{-y}=\lim_{y\to 0}\left\{-2\cdot\frac{1}{2y}\log(1+2y)\right\}=-2\cdot 1=-2.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(3+x)-\log 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{3+x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\frac{x}{3}}\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xe^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\frac{2}{e^0}\cdot 1=2.$

(別解) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=1-(-1)=2.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\log 3^x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\log 3\cdot\frac{e^{(\log 3)x}-1}{(\log 3)x}=\log 3\cdot 1=\log 3.$

問 7 (1) $\displaystyle\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$\displaystyle=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

(2) $\displaystyle\cos\frac{7}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

(3) $\displaystyle\tan\frac{11}{12}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{2}{3}\pi+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{2}{3}\pi\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$\displaystyle=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{-2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}-2.$

(4) $\displaystyle\sin^2\frac{\pi}{8}=\sin^2\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$

(5) $\displaystyle\sin\frac{7}{12}\pi+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\left(\frac{\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

(6) $\displaystyle\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cos\frac{\pi}{12}\right)$

$\displaystyle=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{4}{12}\pi\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

問 8 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} = 2.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2}{3}\right) = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{x}\cdot\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{1}{3}\right) = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin 0}{\cos 0} = \frac{1-0}{1} = 1.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{(x\sin 2x)(1+\cos 2x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(x\sin 2x)(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}\right)$$

$$= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{1+\cos 0} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos 0}{\cos^2 0} = 2.$$

問 9 (1) $\displaystyle\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$ (2) $\displaystyle\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$ (3) $\displaystyle\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$

(4) $\displaystyle\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$ (5) $\displaystyle\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$ (6) $\displaystyle\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$

問 10 $\theta = \sin^{-1}\dfrac{1}{3} = \tan^{-1} x$ とおくと，$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$, $x = \tan\theta$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．ここで,

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{8}$$

であるから，$\tan^2\theta = \dfrac{1}{8}$ を得る．さらに，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\theta > 0$ であるから，$x = \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となる．

問 11 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{-1} 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2.$

(2) $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$（例 15）なので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^{-1} x}{x} = -1.$

(3) $y = \tan^{-1} x$ とおくと，$x \to 0$ のとき $y \to 0$．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1} x} = \lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = 1.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} 2x}{\tan^{-1} 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1} 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\tan^{-1} 3x}\cdot\frac{2}{3}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\sin^{-1} x$ の連続性により，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sin 2x} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi}\cos^{-1}(\cos x) = \cos^{-1}(\cos 2\pi) = \cos^{-1} 1 = 0.$ (補足) $\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$ なので $\cos^{-1}(1) = 0.$

問 12　(1)　$y = \sinh^{-1} x$ とおくと，$x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ であるから，$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ を得る．これを e^y について解くと，$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ となる．ここで $e^y > 0$ であるから，$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ である．したがって，$y = \sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ を得る．

(2)　$y = \cosh^{-1} x$ とおくと，$x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ であるから，$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ を得る．これを e^y について解くと，$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$ となる．ここで，仮定より $x \geqq 1$ であり，また $\cosh^{-1} x$ の値域は $y \geqq 0$ であるから $e^y \geqq 1$ である．よって，$e^y = x + \sqrt{x^2-1}$ である．したがって，$y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ を得る．

(3)　$y = \tanh^{-1} x$ とおくと，$x = \tanh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$ であるから，$x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}$ より，$(1-x)e^{2y} = 1 + x$ を得る．したがって，$e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$ である．ここで，仮定より $|x| < 1$ であるから，$\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ であり，また $e^y > 0$ であるから，$e^y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ となる．したがって，$y = \tanh^{-1} x = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ を得る．

演習問題 1

1.　仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して，$n > N$ となる任意の自然数 n に対して，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ．このとき，(2) と (4) を示す．

(2)　$k = 0$ のときは明らか．$k \neq 0$ のときは，$|ka_n - k\alpha| < |k|\varepsilon$ なので，極限の定義より，$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$.

(4)　第 1 章の定理 1 (3) より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せばよい．$\beta \neq 0$ なので $\frac{|\beta|}{2} > 0$．このとき，仮定より，自然数 N_0 が存在して，$n > N_0$ となる任意の自然数 n に対して $|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$．また，1.1 節の問 1 より，$|\beta| - |\beta - b_n| \leqq ||\beta| - |\beta - b_n|| \leqq |\beta - (\beta - b_n)| = |b_n|$．これらの不等式より，$\frac{|\beta|}{2} < |b_n|$．ゆえに，$N_1 = \max\{N, N_0\}$ とおくと，$n > N_1$ となる任意の自然数 n に対して $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|\beta|\ |b_n|} < \frac{2}{|\beta|^2}\varepsilon$．よって，定義から $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$.

2.　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して，$n > N$ となる任意の自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．この n は $n + k > N$ を満たすので，$|a_{n+k} - \alpha| < \varepsilon$．よって，$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \alpha$ となる．逆に，$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \alpha$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して，$n > N$ となる任意の自然数 n に対して $|a_{n+k} - \alpha| < \varepsilon$．そこで，$m > N + k$ なる任意の自然数 m をとると，この m は $m - k > N$ を満たすので，$|a_m - \alpha| = |a_{(m-k)+k} - \alpha| < \varepsilon$．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

3.　(1)　$X = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, m,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ において，$\dfrac{1}{m}$ と $\dfrac{(-1)^n}{n}$ は無関係に決まる数だから，X を次のように X_1 と X_2 に分けて考える：

$$X_1 = \left\{ \frac{1}{m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots \right\}, \quad X_2 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots \right\}.$$

このとき，$\sup X_1 = \max X_1 = 1$，$\inf X_1 = 0$ であり，X_1 の最小値は存在しない．一方，$\sup X_2 = \max X_2 = \dfrac{1}{2}$，$\inf X_2 = \min X_2 = -1$ である．以上より，$\sup X = \dfrac{3}{2}$，$\inf X = -1$ であり，X の最大値は $\dfrac{3}{2}$ で，最小値は存在しない．

(2)　$Y = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ 1 + \dfrac{1}{2},\ 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}, \ldots \right\}$ について，

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} < 2.$$

以上より，$\sup Y = 2$，$\inf Y = 1$ であり，最小値は 1 で，最大値は存在しない．

(注意) $\left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} = 2 = \sup Y$.

4.　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 5}{-2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,\{n - (n-1)\}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

(3)　$\sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{5^n\left(2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 4\right)} = 5\sqrt[n]{2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 4}$．ここで，$0 < \left(\dfrac{3}{5}\right)^n < 1$ なので

$4 < 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 4 < 6$．したがって，$5\sqrt[n]{4} < 5\sqrt[n]{2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 4} < 5\sqrt[n]{6}$．ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{4} = \lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{6} = 5$

よって，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n} = 5$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+4\left(\frac{4}{5}\right)^n}=5$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{n+1}}=\frac{e^2}{1}=e^2.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=0\cdot e^{\frac{1}{2}}=0.$

5. 漸化式の形から，$a_1>0$ なので $a_n>0$ である．よって，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\geqq\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$$

となる．したがって，$\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界である．さらに，$a_{n+1}\geqq\sqrt{3}$ より，

$$a_{n+1}-a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{3}{a_{n+1}}\right)=\frac{a_{n+1}^2-3}{2a_{n+1}}\geqq 0$$

となるので，$a_{n+1}\geqq a_{n+2}$ である．したがって，$\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は単調減少列である．以上より，$\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列であるから収束する．その極限を α とおくと，与えられた漸化式より，

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{3}{\alpha}\right)$$

が成り立つ．よって，$\alpha^2=3$ である．ここで，$a_n\geqq\sqrt{3}>0$ $(n\geqq 2)$ より，$\alpha\geqq\sqrt{3}>0$ である．したがって，$\alpha=\sqrt{3}$ となる．以上より，$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ である．

6. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\to\frac{1}{3}\ (n\to\infty).$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$ (収束).

(2) $\displaystyle\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$ だから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)(n+3)}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\to\frac{5}{12}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{5}{12}$ (収束).

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}&=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n}{n-1}+\log\frac{n+1}{n}\\&=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$ は発散する．

(別解) $\displaystyle\log\frac{k+1}{k}=\log(k+1)-\log k$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}$$

$$= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + \{\log(n+1) - \log n\}$$
$$= -\log 1 + \log(n+1) = \log(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ は発散する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}$ は発散する．

(5) $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \to 1 \quad (n\to\infty)$. よって，$\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

$\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(-2)^k} = \frac{\frac{1}{-2} - \left(\frac{1}{-2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{-2}\right)} = \frac{2}{3}\left\{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \to -\frac{1}{3} \quad (n\to\infty)$. よって，

$\displaystyle T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n} = -\frac{1}{3}$. これらより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{(-2)^n}\right\} = S + T = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (収束).

(6) $\displaystyle \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$+ \cdots + \left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ (収束).

(注意) はじめの式変形は，部分分数分解により求めることができる．詳しくは，pp.61-63 を参照のこと．

7. (1) $\displaystyle \sin\frac{5}{3}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ (2) $\displaystyle \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(3) $\displaystyle \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$ (4) $\displaystyle \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$

8. (1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right)\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x})^3 - (\sqrt[3]{1-x})^3}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\log\sqrt{x^2+1} - \log x\right) = \lim_{x\to\infty} \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \log\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \log 1 = 0.$

(3) $y = -x$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき $y \to \infty$. よって，$y > 0$ としてよいことに注意して，

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right) = \lim_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2-y+1} - y\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{\left(\sqrt{y^2-y+1} - y\right)\left(\sqrt{y^2-y+1} + y\right)}{\sqrt{y^2-y+1} + y}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\left(y^2-y+1\right)-y^2}{\sqrt{y^2-y+1}+y} = \lim_{y\to\infty} \frac{-y+1}{\sqrt{y^2-y+1}+y} = \lim_{y\to\infty} \frac{-1+\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right\}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right\}}{x-\frac{\pi}{4}}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}.$$

(5) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおくと，$2y = \pi - 2x$ であり，$x \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき $y \to 0$ だから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x = \lim_{y\to 0}\left\{2y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right\} = \lim_{y\to 0}\left(2y\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\right) = \lim_{y\to 0}\left(2y\cdot\frac{\cos y}{\sin y}\right)$$

$$= 2\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y\right) = 2\cdot 1\cdot\cos 0 = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+2e^{-x}\right)^{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)^{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{e^x}{2}}\right)^{\frac{e^x}{2}}\right\}^2 = e^2.$

9. $f(x) = x - \cos^3 x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続である．また，$f(0) = 0 - \cos^3 0 = -1 < 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \cos^3\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} > 0$ である．よって，中間値の定理より，$f(c) = 0$ を満たす $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在する．したがって，$c = \cos^3 c$ を満たす $c \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ が存在する．

10. $g(x) = f(x) - x$ とおく．f は $[a, b]$ で連続であるから，g も $[a, b]$ で連続である．また，f の値域が $[a, b]$ に含まれるので，$a \leqq f(x) \leqq b$ $(x \in [a, b])$ が成り立つ．特に，$f(a) \geqq a$，$f(b) \leqq b$ であるから，$g(a) = f(a) - a \geqq 0$, $g(b) = f(b) - b \leqq 0$ を得る．よって，中間値の定理より，$g(c) = 0$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する．したがって，$f(c) = c$ となる $c \in [a, b]$ が存在する．

11. $\theta = \tan^{-1} x$ とおく．まず，$x > 0$ のとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．また，$\tan\theta = x \neq 0$ であるから，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{x}$$

となる．ここで，$0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ を得る．したがって，

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}$$

である．

次に，$x < 0$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$ である．また，$\tan\theta = x \neq 0$ であるから，

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{x}$$

となる．ここで，$-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} - \theta < 0$ であるから，$\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2} - \theta$ を得る．したがって，

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \theta + \left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{\pi}{2}$$

である．