1　極限

演習問題 1

1. 仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して，$n > N$ なる任意の自然数 n に対して，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ．このとき，以下より示される：

(2)　$k = 0$ のときは明らか．$k \neq 0$ のときは，$|ka_n - k\alpha| < |k|\varepsilon$.

(4)　定理 1 (3) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せばよい．$\beta \neq 0$ なので $\dfrac{|\beta|}{2} > 0$．よって，自然数 N_0 が存在して，$n > N_0$ ならば $|b_n - \beta| < \dfrac{|\beta|}{2}$．また，問 1 より，$|\beta| - |\beta - b_n| \leqq |\beta - (\beta - b_n)| = |b_n|$．よって，$\dfrac{|\beta|}{2} < |b_n|$．ゆえに，$N_1 > N$ かつ $N_1 > N_0$ なる自然数 N_1 を選べば，$n > N_1$ ならば $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{\beta}\right| = \dfrac{|b_n - \beta|}{|\beta|\ |b_n|} < \dfrac{2}{|\beta|^2}\varepsilon$.

2.　(1)　$X = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, m,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ において，$\dfrac{1}{m}$ と $\dfrac{(-1)^n}{n}$ は無関係に決まる数だから，X を次のように X_1 と X_2 に分けて考える：

$$X_1 = \left\{ \frac{1}{m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots \right\},\quad X_2 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

このとき，$\sup X_1 = \max X_1 = 1$，$\inf X_1 = 0$ であり，X_1 の最小値はない．一方，$\sup X_2 = \max X_2 = \dfrac{1}{2}$，$\inf X_2 = \min X_2 = -1$ である．よって，$\sup X = \max X = \dfrac{3}{2}$，$\inf X = -1$ であり，X の最小値はない．

(2)　$Y = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ 1 + \dfrac{1}{2},\ 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}, \dots \right\}$ について，

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} < 2$$

だから，$\sup Y = 2$，$\inf Y = \min Y = 1$ であり，最大値はない．

(注意) $\left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} = 2 = \sup Y$.

3.　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 5}{-2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\{n - (n-1)\}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

(3)　$5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 4} < 5\sqrt[n]{2 + 4} = 5\sqrt[n]{6}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{6} = 5$ だから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n} = 5$.

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - 3^n}{5^n + 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^n} = 5$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}} \right\}^2 = e^2$ だから，$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} = e^2$ である．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{-1} = e^2 \cdot 1^{-1} = e^2$.

(注意) $\dfrac{n+1}{2}$ は必ずしも自然数ではないことから，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\}$ は，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の部分列ではないので定理 6 を適用できない．一方，$x \to \infty$ は任意のやり方で x を限りなく大きくしてもよいことを意味しているので，$x \to \infty$ のとき極限値をとれば，$n \to \infty$ でも同じ極限値をとるという性質を利用した．

(6) $1 < \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{-n} = \left(1-\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n} < \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e^{-1}\cdot e} = 1 \ (n \to \infty)$$

よって，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

4. $a_1 > 0$ より $a_n > 0$．よって，相乗・相加平均の関係より $a_{n+1} \geqq \sqrt{a_n \cdot \dfrac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$．また，$a_{n+1} - a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 - 3}{2a_{n+1}} \geqq 0$ より $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列なので収束する．極限値を α とおくと $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\alpha + \dfrac{3}{\alpha}\right)$．$a_n > 0$ より $\alpha > 0$．ゆえに $\alpha = \sqrt{3}$.

5. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right\} \to \frac{1}{3} \ (n\to\infty).$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ (収束).

(2) $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}\right)$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \to \frac{5}{12} \quad (n\to\infty)$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{5}{12}$ (収束).

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\frac{k+1}{k} = \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n}{n-1} + \log\frac{n+1}{n}$

$$= \log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) \to \infty \quad (n\to\infty).$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{n}$ は発散する．

(別解) $\log\dfrac{k+1}{k} = \log(k+1) - \log k$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n} \log\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1) - \log k\}$$

$$= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + \{\log(n+1) - \log n\}$$

$$= -\log 1 + \log(n+1) = \log(n+1) \to \infty \quad (n\to\infty).$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{n}$ は発散する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\neq 0$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}$ は発散する．

(5) $$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\to 1\quad(n\to\infty).$$ よって，$\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(-2)^n}=\frac{\frac{1}{-2}-\left(\frac{1}{-2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{-2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\to-\frac{1}{3}\quad(n\to\infty).$$ よって，

$\displaystyle T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n}=-\frac{1}{3}$. これらより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(-2)^n}\right\}=S+T=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (収束).

(6) $\displaystyle\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$ だから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}&=\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right\}\\&\qquad+\cdots+\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{k+2}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$ (収束).

(注意) はじめの式変形は，部分分数分解により求めることができる．詳しくは，pp.61-63 を参照のこと．

6. (1) $\displaystyle\sin\frac{5}{3}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\displaystyle\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\displaystyle\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

(4) $\displaystyle\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=-\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

7. (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x})^3-(\sqrt[3]{1-x})^3}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}\\&=\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{1}+\left(\sqrt[3]{1}\right)^2}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\log\sqrt{x^2+1}-\log x\right)=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\log 1=0$

(3) $y=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$. よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)&=\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{y^2-y+1}-y\right)\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{\left(\sqrt{y^2-y+1}-y\right)\left(\sqrt{y^2-y+1}+y\right)}{\sqrt{y^2-y+1}+y}\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y^2-y+1}^2-y^2}{\sqrt{y^2-y+1}+y}\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{-y+1}{\sqrt{y^2-y+1}+y}\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+1}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right\}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\frac{\pi}{4}\cos x\right\}}{x-\frac{\pi}{4}}\\
&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(5) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\to 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x&=\lim_{y\to 0}\left\{2y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{2y\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{2y\cos y}{\sin y}=2\cdot 1\cdot\cos 0=2.
\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+2e^{-x}\right)^{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)^{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{e^x}{2}}\right)^{\frac{e^x}{2}}\right\}^2=e^2$

(7) $$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{\sin x}+\frac{\sinh x}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}+\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{e^x}\right)\\
&=1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{e^0}=2
\end{aligned}$$

(注意) 例 12(p.20) を参照のこと．なお，この問題は，第 2 章の定理 15（ロピタルの定理）を使うと簡単に計算できる．しかし，そもそも $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$ は微分の定義式なので，本来はここで求めているように考えるべきものである．

(8) $$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^{-x}}{2^x-2^{-x}}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-5^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{2^x-2^{-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{15^x-1}{5^x x}\cdot\frac{1}{\frac{4^x-1}{2^x x}}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left(e^{x\log 15}-1\right)\cdot\log 15}{5^x(x\log 15)}\cdot\frac{1}{\frac{(e^{x\log 4}-1)\log 4}{2^x(x\log 4)}}\right\}\\
&=\frac{1\cdot\log 15}{5^0}\cdot\frac{1}{\frac{1\cdot\log 4}{2^0}}=\frac{\log 15}{\log 4}=\frac{\log 15}{2\log 2}(=\log_4 15)
\end{aligned}$$

8. (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ だから，$a=1$ とすれば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0)$ となり，$x=0$ で連続となる．

(2) $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x| \to 0$ $(x \to 0)$ より $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ だから， $b = 0$ とすれば，$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ となり，$x = 0$ で連続となる．

9. $g(x) = f(x) - x$ とおくと，$g(x)$ は $[a,b]$ で連続で，$g(b) \leqq 0 \leqq g(a)$．よって， 中間値の定理より，$g(c) = 0$ となる $c \in [a,b]$ が存在する．

10. $f(x) = x - \cos^3 x$ とおいて，中間値の定理または不動点定理を適用．

11. (1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ だから，$\tan^{-1} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$．

(2) $y = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ とおくと，$0 < y < \frac{\pi}{2}$，$\sin y = \frac{3}{5}$ である．よって，$\cos y > 0$ であり，

$$x = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

12. (1) $\theta = \tan^{-1} x$ とおくと，$x > 0$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$．$\tan\theta = x$ より $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{x}$．このとき，$0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$ より，$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta$．

(2) $\alpha = \sin^{-1} x$ とおくと，$x = \sin\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$．よって，

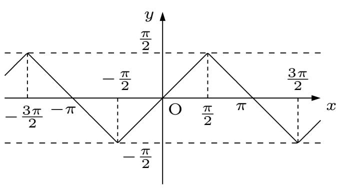
$$\cos^2(\sin^{-1} x) = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - x^2.$$

13. (1) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$，$\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

(注意) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ に限り $\sin^{-1}(\sin x) = x$ である．また，$0 \leqq x \leqq \pi$ に限り $\cos^{-1}(\cos x) = x$ である．

(2) (1) を参考にグラフを作成すると以下のようになる．

(a) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ のグラフ



(b) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ のグラフ