1　極限

1.1　数列と級数

問 1　$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$，$-|\beta| \leqq \beta \leqq |\beta|$ より，$-(|\alpha|+|\beta|) \leqq \alpha+\beta \leqq |\alpha|+|\beta|$ を得る．特に，α と β が同符号のとき等号が成立することが分かる．

　また，三角不等式より，$|\alpha| = |(\alpha-\beta)+\beta| \leqq |\alpha-\beta|+|\beta|$ となる．よって，$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$．さらに，$\alpha$ と β を入れ替えて，$|\beta|-|\alpha| \leqq |\beta-\alpha| = |\alpha-\beta|$ を得る．これらを合わせると，$-|\alpha-\beta| \leqq |\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$．したがって，$\Big||\alpha|-|\beta|\Big| \leqq |\alpha-\beta|$.

問 2　仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して，$n > N$ なる任意の自然数 n に対して，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．このとき，問 1 を使うと，$\Big||a_n|-|\alpha|\Big| \leqq |a_n-\alpha| < \varepsilon$ となる．

問 3　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = 0+0 = 0.$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-1}{3n^3+2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$

(5)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = 0\end{aligned}$$

(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)-2^2}{n(\sqrt{n+4}+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(\sqrt{n+4}+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}+2} = 0$

(7)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right\} = 1+1 = 2\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-1)(\sqrt{n^2+1}+1)}{n(\sqrt{n^2+1}+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(\sqrt{n^2+1}+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}} = 1\end{aligned}$$

(9)　$\displaystyle\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \to 0\ (n\to\infty)$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right\} = 0+0 = 0.$

問 4　$\sqrt[n]{n} \geqq 1$ より，$\sqrt[n]{n} = 1+h_n\ (h_n \geqq 0)$ とおける．二項定理より

$$n = (1+h_n)^n \geqq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geqq 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

これより，$h_n \leqq \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ を得る．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0$ であり，$h_n \geqq 0$ だったから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n = 0$．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+h_n) = 1.$

問 5 (1) $\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1.$

(2) $n \geqq 3$ としてよい．例 7 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!} = 0$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-3)!}\cdot\frac{1}{(1-\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})} = 0\cdot 1 = 0.$$

(3) $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{1}{2}.$$

(4) 例 3 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ $(a>0)$，問 4 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\right)\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1.$

(5) $\sqrt[n]{3^{n+1}+5^n} = 5\sqrt[n]{3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}$ より，$5 < \sqrt[n]{3^{n+1}+5^n} < 5\sqrt[n]{4}$．例 3 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ $(a>0)$ だから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n+1}+5^n} = 5.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = -1$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+4^{n+1}}{5^{n+1}-3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+4\left(\frac{4}{5}\right)^n}{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$

(8)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-4^n}{2^n-3^{n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+2^n)(3^n-2^n)}{2^n-3\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}-(3^n+2^n)\frac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}\\ &< \lim_{n\to\infty}-\frac{1}{3}(3^n+2^n) \to -\infty\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-4^n}{2^n-3^{n+1}} = -\infty.$

(9) $0 \leqq \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n} \leqq \dfrac{1}{n} \to 0\quad(n\to\infty)$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$

問 6 (1) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ と同様にして，有界な単調列であることが示される．また，$\sup\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\middle| n\in\mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ を得る．これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\} = e\cdot e = e^2.$

(注意) 部分列に関する定理 6 を使えば，冒頭の議論を含め，前半の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ は明らか．

(2) (1) と同様にして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = e$ は認めるものとする．さて，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の証明から，次を得る．

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} \leqq \left(1+\frac{1}{3(n+1)}\right)^{3(n+1)} \leqq e.$$

これより,

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n \ \leqq\ \left(1+\frac{1}{3(n+1)}\right)^{n+1} \leqq e^{\frac{1}{3}}.$$

よって,数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調列であり,収束する.この数列の極限値を α とすると,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}^3=\alpha^3.$$

最後の等式より,$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n=\alpha=e^{\frac{1}{3}}$ となる.

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\}=e\cdot 1^{-1}=e$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}=e\cdot 1=e$

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}=e$ は認める.(2) と同様にすれば,数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調列であり収束することが示されるので,この数列の極限値を α とする.このとき,次を得る.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right\}^3=\alpha^3.$$

最後の式より,$\alpha=e^{\frac{1}{3}}$ を得る.また,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{n-\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\\&=e^{\frac{1}{3}}\cdot 1=e^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

よって,$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^n=e^{\frac{1}{3}}$ を得る.以上より,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{-n}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

(注意) 一般に $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ $(a_n\geqq 0)$ のとき,自然数 s に対して,$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{s}}=\alpha^{\frac{1}{s}}$ が成り立つ.これを認めれば,$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$ は明らか.ただし,数列の極限でなく,関数の極限ととらえなおすことで,ずっと簡単に計算できるようになる.1.2 節の問 3(p.15) と比較してみると良い.

(6) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1}=e$

(7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\}=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}$

(8) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}=e^{-1}\cdot e=1$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$ を認めるとする ((5) およびその (注意) を参照のこと)．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=0\cdot e^{\frac{1}{2}}=0.$$

問 7　仮定より，任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N_0，N_1 が存在して，$n>N_0$ ならば $|a_{2n-1}-\alpha|<\varepsilon$，$n>N_1$ ならば $|a_{2n}-\alpha|<\varepsilon$．よって，$N_0$ と N_1 の小さくない方を N とおくと，$n>N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$.

(注意) 実数 a，b に対して，小さくない方を $\max(a,b)$ と書くことにすれば，$N=\max(N_0,N_1)$.

問 8　(1)　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\to 2\cdot\frac{1}{2}=1\ (n\to\infty)$ より，級数は収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$.

(2)　$\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって，収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=-1\neq 0$ より，定理 7(1) の対偶より発散する．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty\neq 0$ より，定理 7(1) の対偶より発散する．

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0$ より，定理 7(1) の対偶より発散する．

(6)　$\displaystyle\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}\to 1\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって，収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1$.

(7)　例 6（p.5）より数列 $a_n=\{(-1)^n\}$ は発散から，定理 7(1) の対偶より発散する．

(8)　$\displaystyle\frac{6}{n(n+1)(n+3)}=\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+3}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}.$$

そこで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$ について考える．

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1-\frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n\to\infty). \\
T_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots \\
&\qquad +\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} \to \frac{5}{6} \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{6}$．以上より，問題の級数は収束し，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right) = 2\cdot 1-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

(注意) はじめの式変形は，有理関数の部分分数分解である．定式化された求め方は pp.61-63 を参照のこと．

(9)　$\theta = k\pi$ (k は整数) のとき，全ての自然数 n に対して $\sin n\theta = \sin(nk\pi)=0$ だから，

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \sum_{k=1}^{n}0 = n\cdot 0 = 0 \to 0 \quad (n\to\infty)
$$

より，$\theta = k\pi$ (k は整数) のとき収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta = 0$．

次に，$\theta = k\pi$ (k は整数) 以外は発散を示す．このためには，$\theta = k\pi$ (k は整数) 以外で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin n\theta \neq 0$ を示せばよい．これは,「全ての $\varepsilon>0$ に対して，自然数 n_0 があり，$n>n_0$ なる全ての自然数 n に対して，$|\sin n\theta - 0| = |\sin n\theta| < \varepsilon$ である」を否定すればよい．すなわち，ある $\varepsilon>0$ があり，どのような自然数 n_0 を選んでも，$|\sin n\theta| \geqq \varepsilon$ となる自然数 $n>n_0$ があることを示せばよい．

改めて，θ は整数 k により $\theta = k\pi$ と表せないとする．このとき $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ とし，ある自然数 n に対して $|\sin n\theta| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする．もし，このような n が存在しなければ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin n\theta = 0$ が成り立たず発散となる．さらに，θ は整数 k で $\theta = k\pi$ と書けないという仮定より，この自然数 n に対して $|\sin n\theta| \neq 0$ であり，$0 < |\sin n\theta| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

このとき，ある自然数 m があり，次の (1) から (4) のいずれかを満たす：

(1)　$0+2m\pi < n\theta < \dfrac{\pi}{4}+2m\pi$，　(2)　$\dfrac{3}{4}\pi+2m\pi < n\theta < \pi+2m\pi$，

(3)　$-\dfrac{\pi}{4}+2m\pi < n\theta < 0+2m\pi$，　(4)　$-\pi+2m\pi < n\theta < -\dfrac{3}{4}\pi+2m\pi$.

そこで，それぞれの場合について，ある自然数 $p=2^s$ (s は自然数) があり，$|\sin(pn\theta)| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となることを

示す．これが示されれば，$|\sin n\theta| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たすどのような自然数 n をとっても，それに対して，それよりも大きい自然数 $q = pn > n$ が必ずあって $|\sin q\theta| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\theta \neq 0$ となる．

(1) $0 + 2m\pi < n\theta < \dfrac{\pi}{4} + 2m\pi$ のとき

$p = 2$ とすると，$0 + 4m\pi < pn\theta = 2n\theta < \dfrac{\pi}{2} + 4m\pi$．このとき，以下のいずれかが成り立つ：

(i) $\dfrac{\pi}{4} + 4m\pi \leqq 2n\theta < \dfrac{\pi}{2} + 4m\pi$ のとき

$|\sin 2n\theta| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$．この場合，$p = 2^1$ である．

(ii) $0 + 4m\pi < 2n\theta < \dfrac{\pi}{4} + 4m\pi$ のとき

$0 < \sin n\theta < \sin 2n\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意すれば，$\dfrac{\pi}{4} + 2^{s+1}m\pi \leqq 2^s n\theta < \dfrac{\pi}{2} + 2^{s+1}m\pi$ となる自然数 $s \geqq 2$ があることが分かる．このとき，$p = 2^s$ とおけば，$|\sin(pn\theta)| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

(2) $\dfrac{3}{4}\pi + 2m\pi < n\theta < \pi + 2m\pi$ のとき

$p = 2$ とすると，$\dfrac{3}{2}\pi + 4m\pi < 2n\theta < 2\pi + 4m\pi$．このとき，以下のいずれかが成り立つ：

(i) $\dfrac{3}{2}\pi + 4m\pi < 2n\theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi + 4m\pi$ のとき

$|\sin 2n\theta| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．この場合，$p = 2^1$ である．

(ii) $\dfrac{7}{4}\pi + 4m\pi < 2n\theta < 2\pi + 4m\pi$ のとき

$-\dfrac{\pi}{4} + 2(2m+1)\pi < 2n\theta < 0 + 2(2m+1)\pi$ と表せるので，(3) に帰着できる．

(3) $-\dfrac{\pi}{4} + 2m\pi < n\theta < 0 + 2m\pi$ のとき

$0 + 2(-m)\pi < n(-\theta) < \dfrac{\pi}{4} + 2(-m)\pi$ であり，$|\sin(n(-\theta))| = |-\sin(n\theta)| = |\sin(n\theta)|$ より (1) に帰着できる．

(4) $-\pi + 2m\pi < n\theta < -\dfrac{3}{4}\pi + 2m\pi$ のとき

$\dfrac{3}{4}\pi + 2(-m)\pi < n(-\theta) < \pi + 2(-m)\pi$ であり，$|\sin(n(-\theta))| = |-\sin(n\theta)| = |\sin(n\theta)|$ より (3) に帰着できる．

以上から，$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\theta \neq 0$ であり，$\theta = k\pi$ (k は整数) 以外は発散することが示される．