一様非拡大性をもつ写像列

Uniformly nonexpansive sequences

青山 耕治　(千葉大学)

1. 概要

H を実 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ を H のノルム, T を H から H への写像とする。文献 [6] に次のような記述がある。

> T が強非拡大 (定義は次節に記す。) であるための必要十分条件は, 任意の $M > 0$ に対して, 以下の条件を満たす増加関数 $\gamma\colon [0, 2M] \to [0, M]$ が存在することである。
>
> - $t \in (0, 2M]$ のとき, $\gamma(t) > 0$;
> - $x, y \in H$, $\|x - y\| \le M$ のとき,
>
> $$\gamma\bigl(\|x - y - (Tx - Ty)\|\bigr) \le \|x - y\| - \|Tx - Ty\|$$
>
> となる。

文献 [2, 3] では, [6] の結果を踏まえて, 強非拡大性をもつ写像列を扱った。その後, 以下の問題を考えた。

問題 1. $\{T_n\}$ を H から H への写像の列とする。このとき, 以下は同値になるか?

1. $\{T_n\}$ は強非拡大列 (定義は次節に記す。) である;
2. 任意の $M > 0$ に対して, 増加関数 $\gamma\colon [0, 2M] \to [0, M]$ が存在し,
   - $t \in (0, 2M]$ のとき, $\gamma(t) > 0$;
   - $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in C$, $\|x - y\| \le M$ のとき, $\gamma\bigl(\|x - y - (T_n x - T_n y)\|\bigr) \le \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\|$ となる。

本講演では, 問題 1 の解, および, それに関連する一様非拡大性をもつ写像列についての結果を報告する。

2. 定義など

H を実 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ を H のノルム, T を H から H への写像とする。

- T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in H$ に対して, $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ が成り立つときをいう。
- T が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, T は非拡大であり, $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ となる H の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \to 0$ が成り立つときをいう [6]。
- T が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in H$ に対して,

$$\|x - y - (Tx - Ty)\|^2 \le \|x - y\|^2 - \|Tx - Ty\|^2 \tag{1}$$

が成り立つときをいう [7]。

2010 Mathematics Subject Classification: 47H09, 47H10, 41A65。
キーワード：一様非拡大写像列, 強非拡大写像, 非拡大写像。

定義より, 堅非拡大写像は強非拡大であることがわかる。実際, T を堅非拡大写像とするとき, (1) より明らかに, T は非拡大とわかる。さらに, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を H の点列とし, $\{x_n - y_n\}$ が有界, $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ とする。このとき, 再び (1) より,

$$\begin{aligned}\|x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n)\|^2 &\le \big(\|x_n - y_n\| + \|Tx_n - Ty_n\|\big)\big(\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\|\big)\\ &\le 2\|x_n - y_n\|\big(\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\|\big) \to 0\end{aligned}$$

となる。

$\{T_n\}$ を H から H への写像の列とする。

- $\{T_n\}$ が強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [2,3]。
  - 各 T_n は非拡大である;
  - $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|T_n x_n - T_n y_n\| \to 0$ となる H の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (T_n x_n - T_n y_n) \to 0$ が成り立つ。
- $\{T_n\}$ が一様非拡大列 (uniformly nonexpansive sequence) であるとは, 任意の $M > 0$ と $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

  $$\begin{aligned}&n \in \mathbb{N},\, x, y \in C,\, \|x - y\| \le M,\, \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\| < \delta\\ &\qquad\qquad \Rightarrow \|x - y - (T_n x - T_n y)\| < \epsilon\end{aligned}$$

  が成り立つときをいう [1]。

強非拡大列および一様非拡大列について, 次のことが知られている [1–3]。

1. 一様非拡大列は, 強非拡大列である。
2. 堅非拡大写像の列は, 一様非拡大列である。
3. 一つの強非拡大写像 T からなる列 $T, T, \ldots$ は一様非拡大列である。しかし, 強非拡大写像の列が一様非拡大列 (強非拡大列) とは限らない。
4. $\{S_n\}$ および $\{T_n\}$ が H 上の一様非拡大列 (強非拡大列) ならば, $\{S_n T_n\}$ は一様非拡大列 (強非拡大列) である [1]。
5. I が H 上の恒等写像, $\{T_n\}$ が H 上の非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ が $[0,1]$ の数列で $\inf_n \lambda_n > 0$ ならば, $\{\lambda_n I + (1 - \lambda_n) T_n\}$ は一様拡大列である [2]。

参考文献

[1] K. Aoyama, *Uniformly nonexpansive sequences*, submitted.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[3] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[4] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[5] R. E. Bruck, *Random products of contractions in metric and Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 319–332.

[6] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[7] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[1] 二つの強非拡大写像の合成は強非拡大であることが知られている [6]。
[2] 恒等写像と非拡大写像の凸結合は, 強非拡大であることが知られている [6]。

有向ネットワーク上の de Rham 型関数方程式系について

村本克志(河合塾)
関口健(東北学院大学名誉教授)

de Rham 関数方程式を有向ネットワーク上に一般化して、定義された関数方程式の系を、有向ネットワーク上の de Rham 型関数方程式系と呼ぶことにする。その解の存在と展開については、実解析学シンポジウム2014で報告した。本報告では、de Rham 型関数方程式系の解が self-affine function の一般化として考えられ、その像が self-affine set となる等、例を交えて報告する。

参考文献：「実解析学シンポジウム2014」の報告集

非加法的測度論におけるEgoroffの定理に関する一考察

室伏 俊明　　　筋野 悟
東京工業大学 知能システム科学専攻

1　はじめに

従来の測度論における Egoroff の定理は，測度が有限ならば，概収束が概一様収束を含意することを主張している．非加法的測度論では，零集合について少なくとも 3 通りの互いに同値でない定義があり（例えば [4, 5]），それぞれの定義に対応する概収束と概一様収束の概念もまた互いに同値ではない．このため，Egoroff の定理の結論（概収束が概一様収束を含意すること）も互いに同値ではない異なるバージョンが存在する．非加法的測度論においては，どのバージョンの Egoroff の定理も一般には成立しない．非加法的測度論において Egoroff の定理の結論を成立させるには，測度の有限性以外の条件が必要である．先行研究（例えば [4, 6]）では，2 通りの零集合の定義に対応する Egoroff の定理の結論の成立条件が議論されている．本稿では，これまで扱われていない [5]における零集合の定義を採用したときのEgoroffの定理の結論の成立条件を一つ与える．

なお，本稿では 2 通りに定義される零集合，概収束，概一様収束の概念を扱うが，それぞれの名称に「強」と「弱」の文字を付して両者を区別する．

2　準備：定義と既存の結果

本稿を通して，$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．

定義 1 $\mathscr{F}$ 上の**非加法的測度**とは，次の 2 条件を満たす集合関数 $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ である．

(LB) $\mu(\emptyset) = 0$,

(MT) $A, B \in \mathscr{F}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

以下，本稿を通して，μ を $\mathscr{F}$ 上の非加法的測度とする．

定義 2 (i) μ が**下から連続** [resp. **上から連続**] であるとは，任意の可測集合の単調増加列 [resp. 単調減少列] $\{A_n\}$ に対して，$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ となることである．

(ii) [2] μ が**順序連続**であるとは，$A_n \downarrow \emptyset$ なる任意の可測集合の単調減少列 $\{A_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ となることである．

(iii) [3, 7] μ が**一様劣加法的連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，可測集合 B が $\mu(B) < \delta$ であれば，任意の可測集合 A について $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \varepsilon$ となることである．

注 1 任意の $\varepsilon \geq 0$ と任意の可測集合 B に対して，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \varepsilon \ (\forall A \in \mathscr{F}) \\ \Leftrightarrow\ & \mu(A \setminus B) \geq \mu(A) - \varepsilon \ (\forall A \in \mathscr{F}) \\ \Leftrightarrow\ & \mu(A) - \varepsilon \leq \mu(A \triangle B) \leq \mu(A) + \varepsilon \ (\forall A \in \mathscr{F}). \end{aligned}$$

定義 3 (i) 可測集合 N が (μ-) **弱零集合**であるとは，$\mu(N) = 0$ であることをいう．

上の (μ-) とは，弱零集合が μ に関するものであることを明示するときには「μ-弱零集合」と表記し，文脈から μ に関するものであることが明確なときには単に「弱零集合」と表記するという意味である（以下においても同様）．

(ii) [1, 5] 可測集合 N が (μ-) **強零集合**であるとは，任意の可測集合 A に対して $\mu(A \cup N) = \mu(A)$ となることをいう．

定義 4 $\{f_n\}$ を可測関数列とし，f を可測関数とする．

(i) $\{f_n\}$ が f に (μ-) **弱概収束** [resp. (μ-) **強概収束**] するとは，ある弱零集合 [resp. 強零集合] N が存在して，すべての $x \in X \setminus N$ に対して $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束することをいう．

(ii) $\{f_n\}$ が f に (μ-) **弱概一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ であるような可測集合 A_ε が存在して，$X \setminus A_\varepsilon$ 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束することをいう．

(iii) $\{f_n\}$ が f に (μ-) **強概一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，すべての可測集合 A について

$$\mu(A \cup A_\varepsilon) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

であるような可測集合 A_ε が存在して，$X \setminus A_\varepsilon$ 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束することをいう．

非加法的測度論における先行研究（例えば [4, 6]）では，弱バージョンの Egoroff の定理の結論が成立するための条件，すなわち，上の定義 4 で定義した弱概収束が弱概一様収束を含意するための条件が議論されており，例えば次の結果が得られている．

定理 1 [4, 6] μ が下から連続かつ上から連続ならば，弱概収束は弱概一様収束を含意する．

本稿では，これまで扱われていない強バージョンの Egoroff の定理の結論の成立条件，すなわち，強概収束が強概一様収束を含意するための条件を議論する．

3 上限増分 $^{\Delta}\mu$ と主結果

定義 5 μ の**上限増分** $^{\Delta}\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ を

$$^{\Delta}\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \in \mathscr{F}} [\mu(A \cup B) - \mu(B)]$$

（ただし，$\infty - \infty \stackrel{\text{def}}{=} 0$）で定義する．

命題 1 上限増分 $^{\Delta}\mu$ は，$\mu(A) \leq {}^{\Delta}\mu(A)\ \forall A \in \mathscr{F}$ なる非加法的測度である．

命題 2 可測集合 N に関する次の 3 条件は互いに同値である．

(i) N は μ-強零集合である．

(ii) N は $^{\Delta}\mu$-強零集合である．

(iii) N は $^{\Delta}\mu$-弱零集合である．

命題 2 から，$^{\Delta}\mu$ は零加法的 [7] である．

系 1 可測関数列 $\{f_n\}$ が可測関数 f に μ-強概収束することと，$^{\Delta}\mu$-弱概収束することは同値である．

命題 3 可測関数列 $\{f_n\}$ が可測関数 f に μ-強概一様収束することと，$^{\Delta}\mu$-弱概一様収束することは同値である．

系 2 μ-強概収束が μ-強概一様収束を含意することと，$^{\Delta}\mu$-弱概収束が $^{\Delta}\mu$-弱概一様収束を含意することは同値である．

系 2 と定理 1 から次の系が得られる．

系 3 $^{\Delta}\mu$ が下から連続かつ上から連続ならば，μ-強概収束は μ-強概一様収束を含意する．

$^{\Delta}\mu$ の下からの連続性と上から連続性それぞれの十分条件を μ のみを用いて表すことを考える．

命題 4 μ が下から連続ならば，$^{\Delta}\mu$ も下から連続である．

命題 5 μ が一様劣加法的連続かつ順序連続ならば，$^{\Delta}\mu$ は上から連続である．

注 2 μ が上から連続であっても，$^{\Delta}\mu$ は上から連続であるとは限らない．

系 3 と命題 4, 命題 5 から次の主定理が得られる．

定理 2 μ が下から連続，一様劣加法的連続，かつ順序連続ならば，強概収束は強概一様収束を含意する．

4 おわりに

本稿では，これまで扱われていない，零集合の定義 3 (ii) （強零集合）を採用したときの Egoroff の定理の結論の成立条件を一つ与えた．これは，μ に関する強バージョンの Egoroff の定理の結論が，上限増分 $^{\Delta}\mu$ に関する弱バージョンの Egoroff の定理の結論と同値であることを踏まえ，下から連続性と上からの連続性の連言が，弱バージョンの Egoroff の定理の結論が成立するための十分条件であるという結果 [4, 6] を利用したものである．

弱バージョンの Egoroff の定理の結論の成立条件には，下から連続性と上からの連続性の連言以外にも複数あるので [6]，上限増分 $^{\Delta}\mu$ に関するそれらの条件を μ を用いて表すことによって，本稿の定理 2 で与えたものとは異なる成立条件を得ることが期待される．これを今後の課題としたい．

参考文献

[1] R. J. Aumann and L. S. Shapley, *Values of Non-Atomic Games*, Princeton Univ. Press, 1974.

[2] L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration I, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, **20** (1972) 269–276.

[3] I. Dobrakov, On submeasures I, *Dissertations Mathematicae*, **112** (1974) 5–35.

[4] J. Li, On Egoroff theorems on fuzzy measure spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **135** (2003) 367–375.

[5] T. Murofushi and M. Sugeno, A theory of fuzzy measures: representations, the Choquet integral, and null sets, *J. Math. Anal. Appl.*, **159** (1991) 532–549.

[6] T. Murofushi, K. Uchino, and S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems*, **146** (2004) 135–146.

[7] Z. Wang, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, *J. Math. Anal. Appl.*, **99** (1984) 195–218.

衡平分割の数学理論

Lyapunovの凸性定理と非加法的測度の応用について

佐柄 信純　(法政大学経済学部)*

概　要

本講演の目的は有限測度空間における可測分割を交換経済における経済主体間の衡平分割の問題として定式化し，研究の歴史的系譜を簡単に踏まえつつ，σ-代数上の選好表現と解の存在定理に関する最近の結果を紹介することである．

Dubins and Spanier [10] の先駆的な研究以降，衡平分割理論では各経済主体の選好は確率測度で表現されるという数学的仮定が標準的に採用されてきた．選好が確率測度で表現可能であることは，効用関数が部分集合族の上で（可算）加法的であることを意味し，その当然の帰結として限界効用は一定になる．すなわち，効用関数 f は集合 A と共通部分を持たない任意の集合 E に対し，$f(A \cup E) - f(A) = f(E)$ を満たし，効用の差分は現行の消費水準 A には依存しない．選好に関するこのような仮定を経済学的に正当化するのは困難であり，経済主体の選好が非加法的効用表現を持つような経済学的条件を追求するのは，極めて自然な要請である．意思決定理論の立場からは，σ-代数上の選好関係（完備性と推移性を満たす二項関係）は非加法的測度として表現されるべきものである．

本講演では，ケーキや土地に象徴されるような分割可能な非同質的財に対する選好関係を効用関数で表現するための公理系を考察する．最初に [16, 22, 23, 24, 25] で展開された可測集合の凸結合の概念を導入し，σ-代数上の（準）凹関数を定義する．これらの概念は Lyapunov の凸性定理を用いて定義されるが，ベクトル空間の（準）凹関数と並行的な概念である．次に σ-代数上の選好関係に単調性，凸性，連続性の 3 つの公理を導入し，選好関係がこれらの公理を満たすことは単調，準凹，連続な効用関数が存在することと同値であることを示す（[22] 参照）．非加法的効用をともなう衡平分割問題の解の存在定理においても，Lyapunov の凸性定理が有効に用いられる．本講演では代替的な衡平性の概念をいくつか紹介し，効率性と衡平性の両立可能性とパレート最適無羨望分割の存在を示す（[17, 20, 23] 参照）．

参考文献

[1] Akin, E., (1995). “Vilfred Pareto cuts the cake”, *J. Math. Econom.* **24**, 23–44.

[2] Barbanel, J. B., (1996). “Super envy-free cake division and independence of measures”, *J. Math. Anal. Appl.* **197**, 54–60.

[3] Barbanel, J. B., (2005). *The Geometry of Efficient Fair Division*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[4] Barbanel, J. B. and A. D. Taylor, (1995). “Preference relations and measures in the context of fair division”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123**, 2061–2070.

[5] Berliant, M., Thomson, W. and K. Dunz, (1992). “On the fair division of a heterogeneous commodity”, *J. Math. Econom.* **21**, 201–216.

[6] Chuaqui, R. and J. Malitz, (1983). “Preorderings compatible with probability measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **279**, 811–824.

2010 Mathematics Subject Classification: 28E10, 91B14, 91B16

キーワード：衡平分割，Lyapunov の凸性定理，選好関係，非加法的効用，パレート最適無羨望性

* e-mail: `nsagara@hosei.ac.jp`

[7] Dall'Aglio, M. and T. P. Hill, (2003). "Maximin share and minimax envy in fair-division problems", *J. Math. Anal. Appl.* **281**, 346–361.

[8] Dall'Aglio, M. and F. Maccheroni. (2005). "Fair division without additivity", *Amer. Math. Monthly* **112**, 363–365.

[9] Dall'Aglio, M. and F. Maccheroni, (2009). "Disputed lands", *Games Econom. Behav.* **66**, 57–77.

[10] Dubins, L. E. and E. H. Spanier, (1961). "How to cut a cake fairly", *Amer. Math. Monthly* **68**, 1–17.

[11] Dvoretsky, A., Wald, A. and J. Wolfowitz, (1951). "Relations among certain ranges of vector measures", *Pacific J. Math.* **1**, 59–74.

[12] Edwards, D. A., (1987). "On a theorem of Dvoretsky, Wald, and Wolfowitz concerning Liapounov measures", *Glasgow Math. J.* **29**, 205–220.

[13] Fine, T., (1971). "A note on the existence of quantitative probability", *Ann. Math. Statist.* **42**, 1182–1186.

[14] Hüsseinov, F., (2009). "α-maximin solutions to fair division problems and the structure of the set of Pareto utility profiles", *Math. Social Sci.* **57**, 279–281.

[15] Hüsseinov, F., (2011). "A theory of a heterogeneous divisible commodity exchange economy", *J. Math. Econom.* **48**, 54–59.

[16] Hüsseinov, F. and N. Sagara, (2012). "Concave measures and the fuzzy core in exchange economies with heterogeneous divisible commodities", *Fuzzy Sets and Systems* **198**, 70–82.

[17] Hüsseinov, F. and N. Sagara, (2013). "Existence of efficient envy-free allocations of a heterogeneous divisible commodity with nonadditive utilities", *Soc. Choice Welf.* **41**, 923–940.

[18] Legut, J. and M. Wilczyński, (1988)."Optimal partitioning of a measurable space", *Proc. Amer. Math. Soc.* **104**, 262–264.

[19] Legut, J. and M. Wilczyński, (2012)."How to obtain a range of a nonatomic vector measure in $\mathbb{R}^2$", *J. Math. Anal. Appl.* **394**, 102–111.

[20] Sagara, N., (2008). "A characterization of α-maximin solutions of fair division problems", *Math. Social Sci.* **55**, 273–280.

[21] Sagara, N., (2013). "A probabilistic representation of exact games on σ-algebras", *Fuzzy Sets and Systems* **216**, 34–51.

[22] Sagara, N. and M. Vlach, (2009). "Representation of preference relations on σ-algebras of nonatomic measure spaces: Convexity and continuity", *Fuzzy Sets and Systems* **160**, 624–634.

[23] Sagara, N. and M. Vlach, (2010). "Convexity of the lower partition range of a concave vector measure", *Adv. Math. Econ.* **13**, 155–160.

[24] Sagara, N. and M. Vlach, (2010). "Convex functions on σ-algebras of nonatomic measure spaces", *Pac. J. Optim.* **6**, 89–102.

[25] Sagara, N. and M. Vlach, (2011). "A new class of convex games and the optimal partitioning of measurable spaces", *Internat. J. Game Theory* **40**, 617–630.

[26] Steinhaus, H., (1948). "The problem of fair division", *Econometrica* **16**, 101–104.

[27] Steinhaus, H., (1949). "Sur la division pragmatique", *Econometrica* **17** (Suppl.), 315–319.

[28] Stromquist, W., (1980). "How to cut a cake fairly", *Amer. Math. Monthly* **87**, 640–644. Addendum in: *Amer. Math. Monthly* **88**, 613–614.

[29] Varian, H. R., (1974). "Equity, envy, and efficiency", *J. Econom. Theory* **9**, 63–91.

[30] Weller, D., (1985). "Fair division of a measurable space", *J. Math. Econom.* **14**, 5–17.

Portmanteau 定理の非加法化

河邊　淳 (信州大学工学部)

1.　発表概要

確率分布の収束に関する Portmanteau 定理 (堅い皮で作られた大きな旅行カバン) によれば，確率分布 m_n, m $(n = 1, 2, \dots)$ の分布的収束，すなわち，任意の m-連続集合 B に対する $m_n(B) \to m(B)$ と，汎関数的収束，すなわち，任意の有界連続な非負関数 f に対する $\int f dm_n \to \int f dm$ は同値となる．本発表では，非加法的測度の積算概念として重要な Choquet，Šipoš，Sugeno，Shilkret 積分汎関数が共通してもつ摂動性に着目し，これら非線形積分に対しも Portmanteau 定理における分布的収束と汎関数的収束が同値となることを報告する．

2.　非線形積分汎関数

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる代数とする．関数 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ は，各 $t \in [-\infty, \infty]$ に対して，$\{f \geq t\}, \{f > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\mathcal{A}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}(X)$ で表し，$\mathcal{F}^+(X) := \{f \in \mathcal{F}(X)\colon f \geq 0\}$ とおく．また，$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| \leq \infty$ とする．集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は，(i) $\mu(\emptyset) = 0$，(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ のとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表し，$\mathcal{M}_b(X) := \{\mu \in \mathcal{M}(X)\colon \mu(X) < \infty\}$ とおく．次の非線形積分は，非加法的測度論及びその応用領域で広く用いられる．

定義 1.　$(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分**: $\mathrm{Ch}(\mu, f) := \displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) dt$

(2) **Šipoš 積分**: $\mathrm{Si}(\mu, f) := \displaystyle\lim_{P \in \Delta^+} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \mu(\{f \geq a_i\})$.
ただし，Δ^+ は分割 $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $(0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty)$ 全体に集合の包含関係で定まる順序を導入した有向集合である．

(3) **Sugeno 積分**: $\mathrm{Su}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \big[t \wedge \mu(\{f \geq t\})\big]$

(4) **Shilkret 積分**: $\mathrm{Sh}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \big[t \cdot \mu(\{f \geq t\})\big]$

3.　積分汎関数の摂動性

積分汎関数の摂動条件を定式化するため，測度を用いて関数の支配関係を定義する．

定義 2.　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}(X)$，$\delta \geq 0$ とする．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mu(\{f \geq t\}) \leq \mu(\{g \geq t\}) + \delta$ のとき，f は g により **$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta})$-支配される**といい，$f \prec_{\mu,\delta} g$ で表す．

以下では，$\varphi(0) = \lim_{t \to +0} \varphi(t) = 0$ を満たす関数 $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 全体を Φ で表し，Φ に属する関数を**制御関数**とよぶ．

定義 3.　$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [-\infty, \infty]$ は積分汎関数，i.e.，(i) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して $I(\mu, 0) = 0$，(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X), f, g \in \mathcal{F}(X)$ に対して，$f \leq g$ ならば $I(\mu, f) \leq I(\mu, g)$ とする．

(1) 擬加法 $\oplus\colon [0, \infty]^2 \to [0, \infty]$ と 2 変数関数 $\theta\colon [0, \infty]^2 \to [0, \infty]$ が存在して，任意の $\mu \in \mathcal{M}(X), n \in \mathbb{N}, r_1, \dots, r_n \in (0, \infty), A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ に対して，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n$ かつ

$A_1 \supset \cdots \supset A_n$ ならば

$$I\left(\mu, \bigoplus_{i=1}^{n} (r_i \ominus r_{i-1})\, \chi_{A_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \theta\bigl(r_i \ominus r_{i-1}, \mu(A_i)\bigr)$$

のとき，I は(擬加法 $\oplus$ に関して) **初等的**，θ を I の**生成器**という．ただし，$\ominus\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は $a \ominus b := \inf\{x \in [0,\infty]\colon b \oplus x \ge a\}$ で定まる擬減法である．

(2) 各 $p, q > 0$ に対して，制御関数 $\varphi_{p,q}, \psi_{p,q} \in \Phi$ が存在して，次の摂動条件 (P) を満たすとき，I は**摂動的**という: (P) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X), f, g \in \mathcal{F}^+(X), \varepsilon \ge 0, \delta \ge 0$ に対して，$\|f\| < p, \|g\| < p, \mu(X) < q, f \prec_{\mu,\delta} g + \varepsilon$ ならば $I(\mu, f) \le I(\mu, g) + \varphi_{p,q}(\delta) + \psi_{p,q}(\varepsilon)$.

関数 $\theta\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は次の 3 つの条件を満たすとき**適正**という:

(i) 任意の $a, b, c \in [0,\infty]$ に対して，$b \le c$ ならば $\theta(a,b) \le \theta(a,c)$.

(ii) $b, c \in [0,\infty]$ とする．任意の $r \in (0,\infty)$ に対して $\theta(r,b) \le \theta(r,c)$ ならば $b \le c$.

(iii) 任意の $r \in (0,\infty)$ と空でない任意の $B \subset [0,\infty]$ に対して，$\sup \theta(r,B) = \theta(r, \sup B)$ かつ $\inf \theta(r,B) = \theta(r, \inf B)$.

命題 1. 積分汎関数 Ch，Si，Sh は初等的かつ摂動的で，その生成器 $\theta(a,b) := a \cdot b$ は適正．一方，積分汎関数 Su は初等的かつ摂動的で，その生成器 $\theta(a,b) := a \wedge b$ は適正．

4. 非加法的 Portmanteau 定理

以下では，(X,d) は距離空間，$\mathcal{A}$ は X のすべての開集合を含む集合体とする．X 上の実数値有界連続関数全体を $C_b(X)$ で表し，$C_b^+(X) := \{f \in C_b(X)\colon f \ge 0\}$ とおく．また，X 上の実数値有界 Lipschitz 関数全体を $BL(X,d)$ で表し，その有界 Lipschitz ノルムを $\|f\|_{BL}$ とする．また，$BL^+(X,d) := \{f \in BL(X,d)\colon f \ge 0\}$ とおく．

定理 1. 積分汎関数 $I\colon \mathcal{M}_b(X) \times C_b^+(X) \to [0,\infty]$ は初等的かつ摂動的で，その生成器は適正とする．$\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{M}_b(X)$ は有向列，$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ とする．次の 3 つの条件は同値:

(i) 任意の $f \in C_b^+(X)$ に対して，$I(\mu_\alpha, f) \to I(\mu, f)$.

(ii) 任意の μ-正則開集合 U と任意の μ-正則閉集合 F に対して，$\mu(U) \le \liminf_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha(U)$ かつ $\limsup_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha(F) \le \mu(F)$.

(iii) 任意の μ-強正則集合 $B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu_\alpha(B) \to \mu(B)$.

次の定理は有界 Lipschitz 関数の有界集合上での汎関数的収束の一様性を示しており，連続関数の集合に対するコンパクト性判定条件として有名な Arzelà-Ascoli 定理を巧妙に用いて示せる．

定理 2. 積分汎関数 $I\colon \mathcal{M}_b(X) \times C_b^+(X) \to [0,\infty]$ は初等的かつ摂動的で，その生成器は適正とする．$\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{M}_b(X)$ は同程度一様自己連続な有向列，$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は一様自己連続かつ Radon とする．次の 3 つの条件は同値:

(i) 任意の $f \in C_b^+(X)$ に対して，$I(\mu_\alpha, f) \to I(\mu, f)$.

(ii) 任意の $f \in BL^+(X,d)$ に対して，$I(\mu_\alpha, f) \to I(\mu, f)$.

(iii) 任意の $r > 0$ に対して，$\sup\{|I(\mu_\alpha, f) - I(\mu, f)|\colon f \in BL^+(X,d), \|f\|_{BL} \le r\} \to 0$.