James 定数 $\sqrt{2}$ とノルムの幾何構造との関係について

田中亮太朗　（新潟大）
小室直人（北教大旭川校）
斎藤吉助　（新潟大）

X を Banach 空間とし, B_X と S_X をそれぞれ X の単位球および単位球面とする. そのとき, X が uniformly non-square であるとは, ある正数 δ が存在して, $\|2^{-1}(x+y)\| > 1-\delta$ を満たす任意の元 $x, y \in B_X$ に対して $\|2^{-1}(x+y)\| \leq 1-\delta$ が成立することをいう. これは, $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\delta)$ とも言い換えられる. 2006 年, García-Falset 等 [2] は, uniformly non-square な Banach 空間が非拡大写像に関する不動点性 (fixed point property, f.p.p.) を持つことを証明し, 単位球の四角さ (squareness) が, バナッハ空間における不動点理論と深い繋がりを持つことを示した.

James 定数は, Banach 空間の単位球の四角さを表す指標として, Gao-Lau [1] により 1990 年に導入された. Banach 空間 X に対して, その James 定数 $J(X)$ を次のように定める.

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}.$$

James 定数は, 最も重要な幾何学的定数の一つとして, これまで様々な視点から広く研究されてきた. James 定数の持つ基本的な性質としては, 次のようなものが挙げられる.

(i) 任意の Banach 空間 X に対して, $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ ([1]).
(ii) X が uniformly non-square であることと, $J(X) < 2$ とは同値である.
(iii) $1 \leq p \leq \infty$ かつ $\dim L_p(\mu) \geq 2$ ならば, $J(L_p(\mu)) = \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ ([1]).
(iv) $2J(X) - 2 \leq J(X^*) \leq J(X)/2 + 1$. ここで, X^* は X の dual space を表す ([3]).
(v) $J(X^*) \neq J(X)$ となるような 2 次元ノルム空間 X が存在する ([3]).

James 定数の値を計算することは, Banach 空間の幾何的性質に関する stability theory の研究等においても重要であるが, 一般の Banach 空間において正確な James 定数の値を知ることは極めて困難である. しかし, 2000 年代以降の研究では, 三谷-斎藤 [5] により symmetric absolute norm 空間における James 定数の計算公式が与えられたほか, Nilsrakoo-Saejung [6] が (一般化された) Day-James 空間の James 定数の評価を行う等, 2 次元空間における James 定数の理論は大きな発展を見せた. 特に, 最近では, [7] において symmetric absolute norm を持つ 2 次元ノルム空間 X が常に $J(X^*) = J(X)$ を満たすことが示される等, より詳細な構造が明らかになりつつある.

さて, James 定数の最も基本的な性質の一つとして,

$(*)$ 任意の Hilbert 空間 H に対して, $J(H) = \sqrt{2}$

はよく知られている. 言い換えれば, Hilbert 空間の James 定数は最良値 $\sqrt{2}$ である. しかし, von Neumann-Jordan 定数とは異なり, この $(*)$ の逆は一般には成立しない. 反例として, 正八角形を単位球に持つようなノルムが挙げられる. また, より一般に次が成立する ([1]).

(**) $\pi/4$ 回転不変なノルムを持つ 2 次元空間 X は, $J(X) = \sqrt{2}$ を満たす.

これは, $J(X) = \sqrt{2}$ となるための, 広い意味での十分条件を与えている. しかしその一方で, $J(X) = \sqrt{2}$ となるための必要条件については明らかになっていない.

本講演では, ある一定の条件下で得られる $J(X) = \sqrt{2}$ の必要 (十分) 条件として, 次の二つの結果を報告する.

Theorem 1 ([4])**.** *X を Banach 空間とする. そのとき, $\dim X \geq 3$ ならば, 次は同値.*

(i) *X は Hilbert 空間.*
(ii) *$J(X) = \sqrt{2}$.*

すなわち, $\dim X \geq 3$ ならば, $(*)$ の逆が成立する.

Theorem 2 ([4])**.** *X を 2 次元ノルム空間とする. そのとき, X のノルム $\|\cdot\|$ が symmetric かつ absolute ならば, 次は同値.*

(i) *$\|\cdot\|$ は $\pi/4$ 回転不変.*
(ii) *$J(X) = \sqrt{2}$.*

すなわち, ノルムが symmetric かつ absolute ならば, $(**)$ の逆が成立する.

さらに, 回転不変ノルムの構造や, いくつかの例についても言及する.

参考文献

[1] J. Gao and K.-S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A, **48** (1990), 101–112.

[2] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcuñnan-Navarro, *Uniformly non-square Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., **233** (2006), 494–514.

[3] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math., **144** (2001), 275–295.

[4] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant $\sqrt{2}$*, submitted.

[5] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *The James constant of absolute norms on $\mathbb{R}^2$*, J. Nonlinear Convex Anal., **4** (2003), 399–410.

[6] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *The James constant of normalized norms on $\mathbb{R}^2$*, J. Inequal. Appl. **2006**, Art. ID 26265, 12 pp.

[7] K.-S. Saito, M. Sato and R. Tanaka, *When does the equality $J(X^*) = J(X)$ hold for a two dimensional Banach space X?*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **31** (2015), 1303–1314.

Weakly convergent sequence coefficient and its generalization of direct sums of Banach spaces

Takayuki TAMURA (Chiba University)

Normal structure and uniform normal structure which assure fixed point property for non-expansive mappings are important part of the Banach space geometry. Bynum[2] introduced normal structure coefficient $N(X)$, bounded sequence coefficient $BS(X)$ and weak convergent sequence coefficient $WCS(X)$ of a Banach space X without the Schur property to study uniform normal structure:

Definition 1 ([2])**.** Let X a Banach space without the Schur property.

$$N(X) = \inf \left\{ \frac{\sup\{\|x-y\| : x, y \in C\}}{\inf\{\sup\{\|x-y\| : y \in C\} : x \in C\}} \right\},$$

where the infimum is taken over all nonempty bounded closed convex C with $\sup\{\|x-y\| : x, y \in C\} > 0$.

$$BS(X) = \inf \left\{ \frac{\lim_{k\to\infty} \sup\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}}{\inf\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| : y \in co(\{x_n\})\}} \right\}.$$

where the infimum is taken over all bounded sequence $\{x_n\}$.

$$WCS(X) = \inf \left\{ \frac{\lim_{k\to\infty} \sup\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}}{\inf\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| : y \in co(\{x_n\})\}} \right\}, \tag{1}$$

where the infimum is taken over all weakly convergent sequence $\{x_n\}$ not converging strongly.

Then $WCS(X)$ was characterized in the following proposition. (cf. [1],[9])

Proposition 2 (cf. [1],[9])**.** *Let X be a Banach space without the Schur property. Then*

$$WCS(X) = \inf \left\{ \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\|} : x_n \rightharpoonup 0, \lim_{\substack{n,m\to\infty,\\ n\neq m}} \|x_n - x_m\| \leq 1 \right\}.$$

In [4] $M(X)$ was introduced as a generalization of $WCS(X)$ for a Banach space X:

Definition 3 ([4])**.** Let X a Banach space.

$$M(X) = \sup \left\{ \frac{1+a}{R(a, X)} : a \geq 0 \right\},$$

where $R(a, X) = \sup\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n + x\| : x_n \rightharpoonup 0, \lim_{\substack{n,m\to\infty,\\ n\neq m}} \|x_n - x_m\| \leq 1, \|x\| \leq a\}$.

We can easily see the following proposition.

Proposition 4. *Let X be a Banach space without the Schur property. If $WCS(X) > 1$, then $M(X) > 1$.*

Also in [4] the following proposition was shown.

Proposition 5 ([4]). *Let X be a Banach space and let $M(X) > 1$. Then X has the weak fixed point property for non-expansive mappings.*

In [5] it was proved that any uniform non-square Banach space X has fixed point property for non-expansive mappings *through showing* $M(X) > 1$.

According to [8] we shall introduce ψ-direct sums of Banach spaces.

A norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{C}^N$ is called *absolute* if $\|(z_1, \cdots, z_N)\| = \|(|z_1|, \cdots, |z_N|)\|$ for all $(z_1, \cdots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ and *normalized* if $\|(1, 0, \cdots, 0)\| = \cdots = \|(0, \cdots, 0, 1)\| = 1$. The collection of all norms on $\mathbb{C}^N$ is denoted by AN_N. Let Ψ_N be the family of all continuous convex functions ψ on Δ_N satisfying $(A_0), (A_1), \cdots, (A_N)$:

$$(A_0) \qquad \psi(0, \cdots, 0) = \psi(1, 0, \cdots, 0) = \cdots = \psi(0, \cdots, 0, 1) = 1,$$

$$(A_1) \qquad \psi(s_1, \cdots, s_{N-1}) \geq \Big(\sum_{i-1}^{N-1} s_i\Big)\psi\Big(\frac{s_1}{\sum_{i-1}^{N-1} s_i}, \cdots, \frac{s_{N-1}}{\sum_{i-1}^{N-1} s_i}\Big) \text{ if } \sum_{i-1}^{N-1} s_i > 0,$$

$$(A_2) \qquad \psi(s_1, \cdots, s_{N-1}) \geq (1 - s_1)\psi(0, \frac{s_2}{1 - s_1}, \cdots, \frac{s_{N-1}}{1 - s_1}) \text{ if } s_1 < 1,$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$(A_N) \qquad \psi(s_1, \cdots, s_{N-1}) \geq (1 - s_{N-1})\psi(\frac{s_1}{1 - s_{N-1}}, \cdots, \frac{s_{N-2}}{1 - s_{N-1}}, 0) \text{ if } s_{N-1} < 1.$$

where

$$\Delta_N = \{s = (s_1, \cdots, s_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} : \sum_{j=1}^{N-1} s_j \leq 1, \ s_j \geq 0\}. \tag{2}$$

In [8] they proved that there is 1-1 correspondence from AN_N to Ψ_N.

Let $\psi \in \Psi_N$. We define a norm $\|\cdot\|_\psi$ on $\mathbb{C}^N$ by

$$\|(z_1, \cdots, z_N)\|_\psi = \begin{cases} (|z_1| + \cdots + |z_N|)\psi\left(\frac{|z_2|}{|z_1|+\cdots+|z_N|}, \cdots, \frac{|z_N|}{|z_1|+\cdots+|z_N|}\right) \\ \qquad\qquad \text{if } (z_1, \cdots, z_N) \neq (0, \cdots, 0), \\ 0 \qquad\qquad \text{if } (z_1, \cdots, z_N) = (0, \cdots, 0). \end{cases} \tag{3}$$

Then ψ-direct sum $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_N)_\psi$ is said to be the direct sum $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_N)$ with the following norm:

$$\|(x_1, \cdots, x_N)\|_\psi := \|(\|x_1\|, \cdots, \|x_N\|)\|_\psi \quad \text{for } x_j \in X_j \tag{4}$$

In [7] to characterize the weak nearly uniform smoothness of ψ-direct sums we introduced a subclass $\Psi_N^{(1)}$ of Ψ_N:

Definition 6 ([7]). Let $\psi \in \Psi_N$. We say $\psi \in \Psi_N^{(1)}$ if there exists an element $(t_1, \ldots, t_{N-1}) \in \Delta_N$ such that for some nonempty subset S of $\{1, \ldots, N-1\}$ with $(\chi_S(1)t_1, \ldots, \chi_S(N-1)t_{N-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ one has

$$\begin{aligned} &\psi(t_1, \ldots, t_{N-1}) \\ = &\left(\sum_{i=1}^{N-1} \chi_S(i)t_i\right)\psi\left(\frac{\chi_S(1)}{\sum_{i=1}^{N-1}\chi_S(i)t_i}t_1, \ldots, \frac{\chi_S(N-1)t_{N-1}}{\sum_{i=1}^{N-1}\chi_S(i)t_i}\right) \\ + &\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \chi_S(i)t_i\right)\psi\left(\frac{\chi_{S^c}(1)t_1}{1 - \sum_{i=1}^{N-1}\chi_S(i)t_i}, \ldots, \frac{\chi_{S^c}(N-1)t_{N-1}}{1 - \sum_{i=1}^{N-1}\chi_S(i)t_i}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Then the following proposition holds.

Theorem 7 ([7])**.** *Let $\psi \in \Psi_N$. Then the following are equivalent.*

(i) $\psi \in \Psi_N^{(1)}$.

(ii) *There exists $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ such that with some nonempty proper subset S of $\{1, \ldots, N\}$*

$$\|(a_1, \ldots, a_N)\|_\psi = \|(\chi_S(1)a_1, \ldots, \chi_S(N)a_N)\|_\psi + \|(\chi_{S^c}(1)a_1, \ldots, \chi_{S^c}(N)a_N)\|_\psi, \tag{6}$$

where $(\chi_S(1)a_1, \ldots, \chi_S(N)a_N)$ and $(\chi_{S^c}(1)a_1, \ldots, \chi_{S^c}(N)a_N)$ are nonzero.

(iii) *There exists $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ such that with some nonempty proper subset S of $\{1, \ldots, N\}$ such that*

$$\|(a_1, \ldots, a_N)\|_\psi = \|(\chi_S(1)a_1, \ldots, \chi_S(N)a_N)\|_\psi + \|(\chi_{S^c}(1)a_1, \ldots, \chi_{S^c}(N)a_N)\|_\psi, \tag{7}$$

where

$$\|(\chi_S(1)a_1, \ldots, \chi_S(N)a_N)\|_\psi = \|(\chi_{S^c}(1)a_1, \ldots, \chi_{S^c}(N)a_N)\|_\psi = 1. \tag{8}$$

In this talk we shall characterize $M((X_1 \oplus \cdots \oplus X_N)_\psi) > 1$ through using $\Psi_N^{(1)}$.

References

[1] J.M. Ayerbe, T. Dominguez and G. Lopez, Measure of noncompactness in metric fixed point theory, Birkhaüzer, 1997

[2] W. L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math. **86** (1980), 427436.

[3] T. Domínguez Benavides, *Some properties of the set and ball measures of noncompactness and applications*, J. London Math. Soc. **34** (1986), 120–128.

[4] T. Domínguez Benavides, *A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results*, Houston J. Math. **22** (1996), 835–849.

[5] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster and Eva M. Mazcunan-Navarro, Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings, J. Funct. Anal. **233** (2006), 494-514.

[6] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, On the ψ-direct sums of Banach spaces and convexity, J. Aust. Math. Soc. **75** (2003), 413–422. **7**(2004), 429–437.

[7] M. Kato and T. Tamura, Weak nearly uniform smoothness of ψ-direct sums $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_N)_\psi$, Comment. Math. **52** (2012), 171-198.

[8] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, On absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 879–905.

[9] T. Tamura, $M(X \oplus_\psi Y)$ for the ψ-direct sum of two Banach spaces X and Y, Studies on Humanities and Social Sciences of Chiba University **25**(2012), 1-9.

APPLIED RESULTS OF A FIXED POINT THEOREM IN PARTIALLY ORDERED SETS TO FRACTIONAL ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS

TOSHIKAZU WATANABE* AND MASASHI TOYODA

1. 不動点定理

[4] に, 次の不動点定理が紹介されている.

定理 1 (J J. Nieto - R. R. López, 2005)**.** *$(X, \leq)$ を順序集合とする. また, 距離 d が存在して (X, d) は完備距離空間であるとする. X の単調非減少列 $\{x_n\}$ が x に収束するならば, 任意の n に対して $x_n \leq x$ が成り立つとする. T を X から X への写像とし, 次の条件をみたすとする.*

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ ならば $Tx \leq Ty$ をみたす.
(2) ある $k \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して
$$x \leq y \text{ ならば } d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$
をみたす.
(3) ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたす.

このとき T の不動点が存在する. さらに, 任意の $x, y \in X$ に対して順序 $\leq$ で比較可能な $z \in X$ が存在するならば T の不動点はただひとつである.

[4] では, 定理 1 を 1 階微分方程式の周期解の存在に適用している.

一方, 近年, α 階微分方程式の解の存在と一意性が研究されている ([1, 3, 6] を参照されたい). α は整数とは限らない正の実数であり, $D^\alpha u$ は関数 u の α 階微分を表す. $(0, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数 u の α 階微分は

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

である. ここで $n = [\alpha]+1$ であり, $[\alpha]$ は α の整数部分である. α 階 Riemann-Liouville 微分という. 詳しくは [2] を参照されたい.

本講演では, 定理 1 を α 階微分方程式の境界値問題 $D^\alpha u(t) = f(t, u(t))$ に適用する. ここで $3 < \alpha \leq 4$ であり f は $[0, 1] \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数である. 境界条件は

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \quad (\text{境界条件 I})$$
$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0 \quad (\text{境界条件 II})$$
$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \quad (\text{境界条件 III})$$

の 3 つを考える. これらの境界条件のもとで α 階微分方程式の解の存在と一意性を定理 1 より導く.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46A40, 47B50, 47H10.
Key words and phrases. Fixed point theorem, fractional boundary value problem, partially ordered set.
*Presenting author.

2. 主結果

定理 1 より, 次が得られる.

定理 2. $3 < \alpha \leq 4$ とする. f は $[0,1] \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への連続写像で第 2 変数に関して非減少であるとする. また, ある $\lambda \in \left[0, \frac{1}{\Lambda}\right)$ が存在して $x \leq y$ である任意の $x, y \in [0,\infty)$ および任意の $t \in [0,1]$ に対して $0 \leq f(t,y) - f(t,x) \leq \lambda(y-x)$ とする. ここで $\Lambda = \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)ds$ であり

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left((t-s)^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}(2s - \alpha s - 1) + (\alpha-1)t^{\alpha-3}(1-s)^{\alpha-2}s\right) \\ \hfill (0 \leq s \leq t \leq 1) \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}(2s - \alpha s - 1) + (\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}s\right) \\ \hfill (0 \leq t \leq s \leq 1) \end{cases}$$

である. このとき, α 階微分方程式に関する境界値問題

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

は一意な非負解をもつ

境界条件 II および III に関しても同様の結果が得られる. ただし, 境界条件 III での結果を得るためには, 境界条件 I および II とは違うアプローチを必要とした. 境界条件 III については, [5] を参考にすることで, 解の存在と一意性を示せた.

References

[1] C. Bai, *Triple positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 24 (2008), 1–10.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, In North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] S. Liang and J. Zhang, *Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 5545–5550.

[4] J J. Nieto and R. R. López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, 22 (2005), 223–239.

[5] N. Nyamoradi and M. Javidi, *Existence of multiple positive solutions for fractional differential inclusions with m-point boundary conditions and two fractional orders*, Electron. J. Differential Equations, 187 (2012), 1–26.

[6] X. Xu, D. Jiang and C. Yuan, *Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 4676–4688.

(Toshikazu Watanabe) College of Science and Technology, Nihon University, Tokyo 101–8308, Japan

E-mail address: wa-toshi@mti.biglobe.ne.jp

(Masashi Toyoda) College of Engineering, Tamagawa University, 6-1-1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo, 194-8610, Japan

E-mail address: mss-toyoda@eng.tamagawa.ac.jp

On the Trace Inequalities of Left-Right Multiplicaion Operators

Kenjiro Yanagi*

$M_n(\mathbb{C})$ を n 次行列全体、 $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を n 次エルミート行列全体、$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を n 次正定値行列全体,、 $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を n 次密度行列全体とする．$M_n(\mathbb{C})$ 上の Hilbert-Schmidt 内積を

$$(A,B)_{HS} = Tr(A^*B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}b_{ij}, \quad (A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}))$$

で定義する．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して L_A, R_A を次のように定義する．

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA, \quad (X \in M_n(\mathbb{C})).$$

Proposition 1 L_A, R_A は $(M_n(\mathbb{C}), (\cdot,\cdot))$ 上の線形作用素であり、次の性質を満たす.

(1) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $L_A R_B = R_B L_A$.

(2) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$L_{A+B} = L_A + L_B, \quad R_{A+B} = R_A + R_B, \quad L_{AB} = L_A L_B, \quad R_{AB} = R_B R_A.$$

(3) $A \in M_n(\mathbb{C}),\ \lambda \in \mathbb{C}$ に対して $L_{\lambda A} = \lambda L_A, \quad R_{\lambda A} = \lambda R_A$.

(4) $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $L_{A^*} = (L_A)^*, \quad R_{A^*} = (R_A)^*$.

(5) $A > 0$ に対して $L_A > 0, \quad R_A > 0$.

Proposition 2 $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ のスペクトル分解をそれぞれ

$$A = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad B = \sum_{j=1}^{n}\beta_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

とおく．ただし $\alpha_i > 0$ は A の正固有値、$|\phi_i\rangle$ は対応する固有ベクトルからなる正規直交基底、$\beta_j > 0$ は B の正固有値、$|\psi_j\rangle$ は対応する固有ベクトルからなる正規直交基底である．このとき次が成り立つ.

(1) $L_A = L_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|}R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}$.

*E-mail:yanagi@yamaguchi-u.ac.jp, Division of Applied Mathematical Science, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube City, 755-0811, Japan

(2) $R_B = R_{\sum_{j=1}^n \beta_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|} = \sum_{j=1}^n \beta_j R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_j L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}$.

Theorem 1 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\mathbb{T}\mathrm{r}(L_A) = n\mathrm{Tr}(A)$ が成り立つ．ただし $\mathbb{T}\mathrm{r}$ は $(M_n(\mathbb{C}), (\cdot,\cdot))$ 上の作用素のトレースを表す．

Theorem 2 $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ．

(1) $|L_A - R_B| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i - \beta_j| L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}$.

(2) $\mathbb{T}\mathrm{r}(|L_A - R_B|) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i - \beta_j|$.

(3) $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i - \beta_j||\langle\phi_i|\psi_j\rangle|^2$.

Theorem 3 $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して $D(A,B) = \mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I)$ と定義すると $D(A,B)$ は $M_{n,+}(\mathbb{C})$ 上の距離を与える．すなわち

(1) $D(A,B) \geq 0$ で　$D(A,B) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $A = B$ である．

(2) $D(A,B) = D(B,A)$.

(3) $D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$.

Remark 1 $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I)$ と $\mathrm{Tr}(|A-B|)$ の関係について次のことが成り立つ．

(1) $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ のとき $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I)$ と $\mathrm{Tr}(|A-B|)$ の大小関係はない．なぜなら

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のとき $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I) = 3$,　$\mathrm{Tr}(|A-B|) = \sqrt{10}$. 一方

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

のとき $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I) = 8$,　$\mathrm{Tr}(|A-B|) = \sqrt{58}$.

(2) $A, B \in M_{2,+,1}(\mathbb{C})$ のとき $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I) \leq \mathrm{Tr}(|A-B|)$ が成り立つことが証明できるが、$n \geq 3$ のときにも成り立つことが予想される．

この講演では Audenaert らによる量子情報に関連したトレース不等式において $\mathrm{Tr}(|A-B|)$ の部分を $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I)$ で置き換えても成り立つことを証明付きで述べる．また $\mathrm{Tr}(|A-B|)$ は A, B の固有値を用いて表すことはできないが $\mathrm{Tr}(|L_A - R_B|I)$ は固有値を用いて表すことができるので扱いやすいことを強調したい．

半単純可換 BANACH 環の構成する LAU 環の乗作用素の特徴付けとその応用

高橋眞映 (東邦大・理)

Banach 環 A, B 及び B 上の乗法的汎関数 θ が与えられたとき、2007 年、Sangani Monfared [3] は直積空間 $A \times B$ 上に積：

$$(a,b) \times_\theta (c,d) = (ac + \theta(d)a + \theta(b)c, bd) \ ((a,b),(c,d) \in A \times B)$$

を導入し、Banach 環 $(A \times B, \times_\theta)$ を研究した。この Banach 環は単に $A \times_\theta B$ と書かれる。この型の積は、A. Lau [2] が 1983 年特別な Banach 環のクラスに対して初めて導入したもので、それ故 θ-Lau Banach 環と呼ばれる。その後何人かの研究者は、θ の代わりに準同型写像 $\tau : B \to A$ を用いた所謂 τ-Lau Banach 環を研究している。

1. Lau 型 2 項演算. A, B を 2 つの複素代数 (complex algebra) とする。このとき直積空間 $A \times B$ は座標毎の線形演算で線形空間を作る。 $\mathcal{F}_0(A)$ を零を零に移す A からそれ自身への写像の全体とすると、これは自然な演算で線形空間を作る。

今 2 つの写像 $S, T : B \to \mathcal{F}_0(A)$ を考え固定する。各 $(a,b),(c,d) \in A \times B$ に対して、

$$(a,b) \times_{S,T} (c,d) = (ac + S_d a + T_b c, bd)$$

と定義する。従って $\times_{S,T}$ は $A \times B$ 上の 2 項演算となるが、このとき我々は次の定理を示す事が出来る。

Theorem 1. *Let $\mathcal{L}(A)$ be the algebra of all linear mappings from A into itself. Then $\times_{S,T}$ is an algebra-operation on $A \times B$ if and only if the following conditions hold* :

(i) S (resp. T) *is an anti-homomorphism* (resp. *a homomorphism*) *from B into* $\mathcal{L}(A)$.

(ii) S_b (resp. T_b) *is a right* (resp. *left*) *multiplier of A for each $b \in B$.*

(iii) $S_b T_d = T_d S_b$ *holds for all $b, d \in B$.*

(iv) $(S_b a)c = a(T_b c)$ *holds for all $a, c \in A$ and $b \in B$.*

もし $\times_{S,T}$ が $A \times B$ 上の代数演算であれば、$(A \times B, \times_{S,T})$ を S と T によって定義された Lau 環と呼び、単に $A \times_{S,T} B$ で表す。

次の条件を満たす A からそれ自身への写像の順序対 (T, S) は double multiplier と呼ばれる：

$$xTy = (Sx)y \ (\forall x, y \in A).$$

その様なものの全体を $M(A)$ で表すと、$M(A)$ は自然な演算で代数を作る。このとき我々は Theorem 1 から次の系を得る。

Corollary 1. *Assume that A is a semisimple Banach algebra. Then $\times_{S,T}$ is an algebra-operation on $A \times B$ if and only if the mapping $b \to (T_b, S_b)$ is a homomorphism from B into $M(A)$.*

もし A が半単純可換 Banach 環であれば、$(T, S) \in M(A) \Rightarrow T = S$ が成り立つので、$M(A)$ は通常の乗作用素環となる。それ故 $\times_{S,T}$ が $A \times B$ 上の代数演算である為の必要十分条件は $S = T$ 且つ T が B から $M(A)$ への準同型写像となる事であ

る。この場合我々は $\times_{T,T}$ を単に $\times_T$ と書く。また $A \times_{T,T} B$ は単に $A \times_T B$ と書く。A, B 共に可換であれば、$A \times_T B$ もまた可換である。

以後我々は半単純可換 Banach 環に焦点を当て、A, B をその様な代数とする。

2. Lau 環の multipliers の特徴付け. $T : B \to M(A)$ を norm-decreasing 準同型写像とするとき、Lau 環 $A \times_T B$ は l^1-norm で半単純可環 Banach 環となり、その Gelfand 空間 $\Phi_{A \times_T B}$ は A と B の Gelfand 空間 Φ_A と Φ_B の disjoint union となっている。次の結果は $A \times_T B$ の multipliers を完全に特徴付ける。

Theorem 2. *Let S be a bounded linear mapping from $A \times_T B$ into itself with natural decomposition $S = (S_1, S_2)$. Then $S \in M(A \times_T B)$ if and only if the components S_1, S_2 satisfy the following conditions:*
(i) $S_1|_A \in M(A)$.
(ii) $S_2|_B \in M(B)$.
(iii) $S_2|_A = 0$.
(iv) $(S_1 b)c = T_b(S_1 c) - T_{S_2 b}(c)$ *for all* $c \in A$ *and* $b \in B$.

もし $\{T_b : b \in B\} \subseteq A$ ならば、上の定理は P. A. Dabhi による [1, Theorem 1] そのものである。次に $\widehat{M}(A)$ を A の乗作用素の Gelfand 変換を Φ_A に制限したもの全体とする。他の代数についても同様の記号を用いる。また各 $\widehat{U} \in \widehat{M}(A)$ と $\widehat{V} \in \widehat{M}(B)$ に対して、もし $T_b U - T_{V(b)} \in A$ ならば、組 $(\widehat{U}, \widehat{V})$ は条件 $(\flat)$ を満たすと言う。このとき Theorem 2 の助けを借りて次の定理を示す事ができる。

Theorem 3. *$\widehat{M}(A \times_T B)$ equals the set of all $\sigma \in C^b(\Phi_{A \times_T B})$ such that $\sigma|_{\Phi_A} \in \widehat{M}(A), \sigma|_{\Phi_B} \in \widehat{M}(B)$ and the pair $(\sigma|_{\Phi_A}, \sigma|_{\Phi_B})$ satisfies the condition $(\flat)$.*

上の定理は直接次の θ-Lau 環に関する結果を導く。

Corollary 2. *$\widehat{M}(A \times_\theta B)$ equals the set of all $\sigma \in C^b(\Phi_{A \times_\theta B})$ such that $\sigma|_{\Phi_A} \in \widehat{M}(A), \sigma|_{\Phi_B} \in \widehat{M}(B)$ and $\sigma|_{\Phi_A} - \sigma(\theta)1 \in \widehat{A}$.*

また上の系は直接次の結果を導く。

Corollary 3. *Suppose that A is a non-unital commutative C^*-algebra. Then*

$$\widehat{M}(A \times_\theta B) = \{\sigma \in C^b(\Phi_{A \times_\theta B}) : \sigma|_{\Phi_B} \in \widehat{M}(B), \lim_{\varphi \to \infty} \sigma|_{\Phi_A}(\varphi) = \sigma(\theta)\}$$

holds.

3. 前節の Corollary 2 の結果を用いて I 型 BSE 環が沢山ある事を示す。

References

[1] P. A. Dabhi, Multipliers of perturbed Cartesian product with an application to BSE-property, to appear in Periodica Math. Hung.

[2] A. T.-M. Lau, Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups, *Fund. Math.* **118**(1983),161–175.

[3] M. S. Monfared, On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis, *Studia. Math.* **178-3**(2007),277–294.

ウエイト付きのモレー空間における分数冪積分作用素の有界性について

中村昌平 (首都大学東京)

Our aim in this talk is to discuss the boundedness of the generalized fractional integral operator on the weighted space.

We first give the definition of our function spaces.

Definition 1. Let $1 < q < \infty$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ be a function, and let ω be a weight. The generalized weighted Morrey space $\mathcal{M}_q^\varphi(\omega)$ is defined to be the subset of all measurable functions f satisfying

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\omega)} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{0.1}$$

When we consider the generalized Morrey space, the class $\mathcal{G}_q$ is fundamental.

Definition 2. One says that a function $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ is in $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ for $0 < q < \infty$ if φ is nondecreasing and the map $t \mapsto t^{-n/q}\varphi(t)$ is nonincreasing.

Let us recall the weight class A_q to discuss on the weighted space.

Definition 3. Let $1 < q < \infty$. For a weight ω, define

$$[\omega]_{A_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\omega(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{q'}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q'}}.$$

We also introduce a new weight class $\mathcal{B}_{\varphi,q}$.

Definition 4. Let $1 < q < \infty$ and $\varphi \in \mathcal{G}_q$. One says that a weight ω is in the class $\mathcal{B}_{\varphi,q}$ if there exists $C_{\varphi,q} > 0$ such that, for any $Q_0 \in \mathcal{Q}$,

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}, Q \subset Q_0} \Phi_{\varphi,q,\omega}(Q) \le C_{\varphi,q} \Phi_{\varphi,q,\omega}(Q_0) \tag{0.2}$$

holds, where

$$\Phi_{\varphi,\omega,q}(Q) := \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{\omega(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (Q \in \mathcal{Q}).$$

The following condition generalize the integral condition which is proposed by Pr. Nakai.

Definition 5. One says that φ, ω satisfies the weighted integral condition, if there exists a constant C_0 such that

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi,\omega,q}(sQ)} \frac{ds}{s} \le \frac{C_0}{\Phi_{\varphi,\omega,q}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q}). \tag{0.3}$$

We next recall the definition of the generalized fractional integral operator I_ρ; See [2].

Definition 6.

$$I_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy,$$

for a nonnegative function ρ.

When we consider I_ρ, we always assume that ρ satisfies the "*Dini condition*"

$$\int_0^1 \frac{\rho(s)}{s} ds < \infty, \tag{0.4}$$

so that $I_\rho \chi_Q$ is well defined for any cube Q. In addition, we also assume that ρ satisfies the "*growth condition*": there exist constants $C > 0$ and $0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ such that

$$\sup_{\frac{r}{2} < s \leq r} \rho(s) \leq C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(s)}{s} ds, \quad r > 0. \tag{0.5}$$

The following is a main topic in this talk.

Theorem 0.1. *Let $1 < q \leq u < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ and $\omega \in \mathcal{B}_{\varphi,q} \cap A_q$. Suppose that φ and ω satisfy the weighted integral condition (0.3). Then the following are equivalent:*

1. *For some $C > 0$, ρ, φ and ω satisfy*

$$\widetilde{\rho}(\ell(Q)) \leq C \Phi_{\varphi,q,\omega}(Q)^{1-\frac{q}{u}}, \quad (Q \in \mathcal{Q}), \tag{0.6}$$

where

$$\widetilde{\rho}(t) := \int_0^t \frac{\rho(s)}{s} ds.$$

2. *The generalized fractional integral operator I_ρ is bounded from $\mathcal{M}_q^\varphi(\omega)$ to $\mathcal{M}_u^{\varphi^{\frac{q}{u}}}(\omega)$.*

References

[1] E. Nakai, " On generalized fractional integrals " , Taiwanese J. Math. **5** (2001), 587-602.

Vector-valued inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces

Denny Ivanal Hakim, joint work with Yoshihiro Sawano and Eiichi Nakai

In this talk, we shall discuss the Hardy-Littlewood maximal operator M, defined by

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

where f is a locally integrable function on $\mathbb{R}^n$ and $B(x,r)$ is the ball centered at $x \in \mathbb{R}^n$ with radius r. The Hardy-Littlewood maximal operator M is known to be bounded on the Lebesgue space $L^p(\mathbb{R}^n)$ whenever $1 < p \le \infty$ and to be bounded from $L^1(\mathbb{R}^n)$ to the weak Lebesgue space $wL^1(\mathbb{R}^n)$. The boundedness of M can be extended to Morrey spaces and generalized Morrey spaces (see [1, 3]). For $1 \le q \le p < \infty$, the Morrey space $\mathcal{M}^p_q = \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is defined to be the set of all q-locally integrable functions f such that

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{B(a,r)\subset\mathbb{R}^n} |B(a,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

In [3], Nakai introduced the generalized Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_q = \mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ where $1 \le q < \infty$ and φ is a function from $(0,\infty)$ to itself. The generalized Morrey norm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^\varphi_q}$ is defined by

$$\|f\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} := \sup_{B(a,r)\subset\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(r)}{|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Here, φ is in $\mathcal{G}_q$, that is φ is increasing and the function $t \mapsto t^{-\frac{n}{q}}\varphi(t)$ is decreasing.

We shall discuss a generalization of Morrey spaces, namely generalized Orlicz-Morrey spaces, intoduced in [4]. Recall that a function $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ is called a Young function if Φ is left continuous, convex, $\Phi(0) = 0$, and $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$. The definition of the generalized Orlicz-Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_\Phi(\mathbb{R}^n)$ is as follows:

Definition 1. Let Φ be a Young function and $\varphi \in \mathcal{G}_1$. The $(\Phi; B(a,r))$-average of a measurable function f is defined by

$$\|f\|_{\Phi;B(a,r)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}.$$

The generalized Orlicz-Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_\Phi = \mathcal{M}^\varphi_\Phi(\mathbb{R}^n)$ is defined to be the set of all measurable functions f such that the norm

$$\|f\|_{\mathcal{M}^\varphi_\Phi} := \sup_{B(a,r)\subset\mathbb{R}^n} \varphi(r)\|f\|_{\Phi;B(a,r)}$$

is finite.

We shall establish the vector-valued inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces, namely

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Mf_j)^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} \leq C \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi}$$

for a constant $C > 0$ and for every $1 < r < \infty$. We also give a necessary condition for these inequalities.

References

[1] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat., **7**, (1987), 273–279.

[2] D. I. Hakim, E. Nakai and Y. Sawano, Generalized Fractional Maximal Operators and Vector-valued Inequalities on Generalized Orlicz-Morrey Spaces, Revista Matemática Complutense, (2015), 1-32.

[3] E. Nakai, Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.

[4] Y. Sawano, S. Sugano, and H. Tanaka, Orlicz-Morrey spaces and fractional operators. Potential Anal. **36**, (2012), 517–556.

The Adams type inequality on weighted Morrey spaces and weighted inequalities on Morrey spaces for linear and multilinear fractional integrals

飯田毅士　(福島工業高等専門学校　一般教科)*

1. Introduction

本講演において(重み付き)Morrey空間上の(線形と多重線形の)分数冪積分作用素や分数冪積分作用素とBMO関数のcommutatorに関するAdams型の不等式についての諸結果をまとめて述べる。主結果はIzumi, Komori-Furuya, Satoの結果[3]に関連する。はじめに, (線形と多重線形の)分数冪積分作用素を次のように定義する：

Definition 1. $0 < \alpha < n$ に対して

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

$0 < \alpha < mn$ に対して

$$I_{\alpha,m}\left(\vec{f}\right)(x) := \int_{\mathbb{R}^{mn}} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{|(x-y_1,\ldots,x-y_m)|^{mn-\alpha}} d\vec{y}.$$

次に分数冪積分作用素とBMO関数とのcommtatorを次のように定義する。なお, m重の場合に拡張することは, 主結果の証明に対する本質的な困難を与えない。そのため, m重commutatorに関して定義する。

Definition 2. $m \in \mathbb{Z}_+$ とする。m-fold commutator $[b, I_\alpha]^{(m)}$ は次のように定める。$0 < \alpha < n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$[b, I_\alpha]^{(m)} f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x)-b(y))^m}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)dy.$$

さらに重み付きMorrey空間のノルムを以下のように定義する(see [4]):

Definition 3. $0 < p < \infty$, $0 \le \lambda < 1$, uとvを重み関数とする。

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(u,v)} := \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^n,\\ Q;cube}} \left(\frac{1}{v(Q)^\lambda}\int_Q |f(x)|^p u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remark 1. $u = v = 1$ のとき $L^{p,\lambda}(1,1) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ となる。

Adamsは次の不等式を示した(see [1]):

Theorem A. $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < 1 - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}(1-\lambda)$ とする。さらに,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n(1-\lambda)}$$

と仮定する。このとき,

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}} \le C\|f\|_{L^{p,\lambda}}.$$

* 〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾30　福島工業高等専門学校
e-mail: `tiida@fukushima-nct.ac.jp`

つぎに, $A_{p,q}$-weight を以下のように定める。

Definition 4. $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$. $w \in A_{p,q}$ となるのは以下の条件を満たすものと定める。

$$[w]_{A_{p,q}} := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(⨍_Q w(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_Q w(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Muckenhoupt-Wheeden [5] は次の不等式を示した。

Theorem B. $0 < \alpha < n,$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ とする。さらに $w \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を仮定すると,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C \|f\|_{L^p(w^p)} .$$

Komori-Shirai は次を示した (see [4]):

Theorem C. $0 < \alpha < n,$ $0 < \lambda < 1 - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}(1 - \lambda)$, さらに

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \ \frac{\mu}{q} = \frac{\lambda}{p}$$

とする。$w \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ とすると, 不等式

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\mu}(w^q, w^q)} \leq C \|f\|_{L^{p,\lambda}(w^p, w^q)}$$

が成り立つ。

2013 年に, Izumi, Komori-Furuya and Sato は次を示した (see [3]):

Theorem D. $0 < \alpha < n,$ $0 < \lambda < 1 - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}(1 - \lambda)$, さらに

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n(1 - \lambda)}, \ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

を仮定する。$w \in A_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)$ とすると, 不等式

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q_2,\lambda}(w^{q_1}, w^{q_1})} \leq C \|f\|_{L^{p,\lambda}(w^p, w^{q_1})}$$

が成り立つ。

Remark 2. Adams の不等式が Spanne の不等式より精密であることを示すことと同様にして, Theorem D は Theorem C を精密であることが示される。

本講演ではこれらの多重線形版に対応するものと分数冪積分作用素との commutator 版に対応するものについて述べる。

参考文献

[1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42 (1975), 765-778.

[2] T. Iida, *Weighted estimates of higher order commutators generated by BMO-functions and the fractional integral operator on Morrey spaces*, submitted.

[3] T. Izumi, Y. Komori-Furuya and E. Sato, *The fractional integral operators related to the Adams inequality on weighted Morrey spaces*, Sci. Math. J. online (2013), 661-667.

[4] Y. Komori and S. Shirai, *Weighted Morrey spaces and a singular integral operator*, Math. Nachr. 282 (2009), 219-231.

[5] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 192, (1974), 261-274.

モレー空間の複素補間について

澤野嘉宏，デニー・イバナル・ハキム (首都大学東京)

1 Complex interpolation of Morrey spaces

Let us recall the definition of Morrey spaces.

Definition 1. Let $1 \le q \le p < \infty$. For an $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$-function f its Morrey norm is defined by:

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

The Morrey space $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ is the set of all $L^q(\mathbb{R}^n)$-locally integrable functions f for which the norm $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ is finite.

We aim to consider the complex interpolation of Morrey spaces $\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$ assuming that $1 \le q_0 \le p_0 < \infty$, $1 \le q_1 \le p_1 < \infty$ and $\dfrac{q_0}{p_0} = \dfrac{q_1}{p_1}$.

We assume that X_0 and X_1 are complex Banach spaces here and below. A topological vector space is a linear space such that the addition and the scalar multiplication are both continuous.

Definition 2. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and A a topological vector space. A continuous function $f : \Omega \to A$ is said to be holomorphic, if

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1.2}$$

exists for all $z_0 \in \Omega$. In this case one writes $f'(z_0) \equiv \lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Let E be a subset on $\mathbb{C}$ and X a Banach space, and define

$$\mathrm{BC}(E,X) \equiv \left\{ f : E \to X \,:\, f \text{ is continous and satisfies } \sup_{z\in E} \|f(z)\|_X < \infty \right\}. \tag{1.3}$$

In the theory of complex interpolation, the set S has a special meaning as the following definition shows:

Definition 3. Set $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$ and $\overline{S} \equiv \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \le \mathrm{Re}\,(z) \le 1\}$. Define

$$\mathcal{F}(X_0; X_1) \equiv \{ f \in \mathrm{BC}(\overline{S}, X_0+X_1) \,:\, f \text{ satisfies } (1.5), (1.6) \text{ and } (1.7)\}. \tag{1.4}$$

Here, conditions (1.5), (1.6) and (1.7) are given by

$$f \in \mathrm{BC}(\overline{S}, X_0+X_1), \tag{1.5}$$

$$f|_{\{z\in S\,:\,\mathrm{Re}\,(z)=j\}} \in C(\{z\in S\,:\,\mathrm{Re}\,(z)=j\} \tag{1.6}$$

for $j=1,2$ and

$$f \in \mathcal{O}(S, X_0+X_1). \tag{1.7}$$

We recall the definition of the complex interpolation functors as follows:

Definition 4 (Calderón's first complex interpolation space)**.** Let (X_0, X_1) be a compatible couple of Banach spaces.

1. The space $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ is defined as the set of all functions $F:\bar{S}\to X_0+X_1$ such that
   (a) F is continuous on $\bar{S}$ and $\sup\limits_{z\in\bar{S}}\|F(z)\|_{X_0+X_1}<\infty$,
   (b) F is holomorphic on S,
   (c) the functions $t\in\mathbb{R}\mapsto F(j+it)\in X_j$ are bounded and continuous on $\mathbb{R}$ for $j=0,1$.

   The space $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ is equipped with the norm
   $$\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \equiv \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(it)\|_{X_0},\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(1+it)\|_{X_1}\right\}.$$

2. Let $\theta\in(0,1)$. Define the complex interpolation space $[X_0,X_1]_\theta$ with respect to (X_0,X_1) to be the set of all functions $f\in X_0+X_1$ such that $f=F(\theta)$ for some $F\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$. The norm on $[X_0,X_1]_\theta$ is defined by
   $$\|f\|_{[X_0,X_1]_\theta} \equiv \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : f=F(\theta) \text{ for some } F\in\mathcal{F}(X_0,X_1)\}.$$

Let X be a Banach space. The space $\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X)$ is defined to be the set of all functions $F:\mathbb{R}\to X$ for which the quantity

$$\|F\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X)} \equiv \sup_{-\infty<s<t<\infty}\frac{\|F(t)-F(s)\|_X}{|t-s|}<\infty.$$

Definition 5 (Calderón's second complex interpolation space)**.** Let (X_0, X_1) be a compatible couple of Banach spaces.

1. Define $\mathcal{G}(X_0,X_1)$ as the set of all functions $G:\bar{S}\to X_0+X_1$ such that
   (a) G is continuous on $\bar{S}$ and $\sup\limits_{z\in\bar{S}}\left\|\frac{G(z)}{1+|z|}\right\|_{X_0+X_1}<\infty$,
   (b) G is holomorphic on S,
   (c) the functions
   $$t\in\mathbb{R}\mapsto G(j+it)-G(j)\in X_j$$
   are Lipschitz continuous on $\mathbb{R}$ for $j=0,1$.

   The space $\mathcal{G}(X_0,X_1)$ is equipped with the norm
   $$\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} \equiv \max\left\{\|G(i\cdot)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_0)},\ \|G(1+i\cdot)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_1)}\right\}. \tag{1.8}$$

2. Let $\theta\in(0,1)$. Define the complex interpolation space $[X_0,X_1]^\theta$ with respect to (X_0,X_1) to be the set of all functions $f\in X_0+X_1$ such that $f=G'(\theta)$ for some $G\in\mathcal{G}(X_0,X_1)$. The norm on $[X_0,X_1]^\theta$ is defined by
   $$\|f\|_{[X_0,X_1]^\theta} \equiv \inf\{\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} : f=G'(\theta) \text{ for some } G\in\mathcal{G}(X_0,X_1)\}.$$

We discuss the output when $X_0=\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n)$ and $X_1=\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$.

4 次元における Kuratsubo 現象について

大坪和弥（有限会社ボンエージェンシー・
茨城大学大学院理工学研究科）
倉坪茂彦（弘前大学名誉教授）
中井英一（茨城大学理学部）

3 次元以上において、球の定義関数のフーリエ球形部分和について、Pinsky 現象が起こることが知られている。これに対して最近 M. Taylar は、定義関数以外の関数を用いて、2 次元でも Pinsky 現象が起こることを示した。一方、5 次元以上において、球の定義関数のフーリエ球形部分和について、Kuratsubo 現象が起こることが知られている。以上のことから、4 次元でも Kuratsubo 現象が起こる場合があるのではないかと予想される。このことを報告する。

実解析学シンポジウム 2015 東邦大学

Rigidity for matrix-valued Hardy functions

Yukio Kasahara (Hokkaido University)
Akihiko Inoue (Hiroshima University)
Mohsen Pourahmadi (Texas A&M University)

Let $\mathscr{V}$ be a complex Euclidean space of column vectors with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{V}}$, and write $\mathscr{M}$ for the space of complex square matrices of corresponding order. The symbol $*$ stands for the conjugate transpose.

For $1 \leq p \leq \infty$, let $H^p_{\mathscr{M}}$ be the standard Hardy space of $\mathscr{M}$-valued functions on the open unit disc. As usual, a function in $H^p_{\mathscr{M}}$ will be identified with its boudary function on the unit circle $\mathbb{T}$. Every function F in $H^1_{\mathscr{M}}$ admits a factorization

$$F = f f_\sharp$$

with a pair of functions f and $f_\sharp$ in $H^2_{\mathscr{M}}$ satisfying $f^* f = f_\sharp f_\sharp^*$. This will be called an *HL-factorization* after Helson–Lowdenslager [2]; their original result was extended by Sarason [6]. An HL-factorization is closely related with the polar decompositions

$$F = U\,(F^*F)^{1/2} = (FF^*)^{1/2}\,U,$$

where U is a measurable $\mathscr{M}$-valued function such that $U(e^{i\theta})$ is a partial isometry with initial space $F(e^{i\theta})^*\mathscr{V}$ and final space $F(e^{i\theta})\mathscr{V}$ (a.e.); these conditions make U unique.

Given a function, its HL-factorization is useful for characterizing the functions with the same partially isometric factor as it.

Proposition 1. *Let F be a function in $H^1_{\mathscr{M}}$ with HL-factorization $F = f f_\sharp$. A function G in $H^1_{\mathscr{M}}$ has the same partially isometric factor as F if and only if it can be expressed as $G = f K f_\sharp$ for a measurable $\mathscr{M}$-valued function K satisfying*

$$K(e^{i\theta}) \geq 0, \qquad K(e^{i\theta})\mathscr{V} = f_\sharp(e^{i\theta})\mathscr{V} \qquad \text{(a.e.)}. \tag{1}$$

Nakazi [5] pointed out that a nonzero scalar-valued function g in H^1 is outer if and only if k is constant whenever kg lies in H^1 for a nonnegative, bounded measurable function k. This fact can be generalized as follows.

Proposition 2. *Let F be a function in $H^1_{\mathscr{M}}$ with HL-factorization $F = f f_\sharp$. Then f is left-outer and $f_\sharp$ is right-outer if and only if K is constant whenever $f K f_\sharp$ lies in $H^1_{\mathscr{M}}$ for a bounded measurable $\mathscr{M}$-valued function K satisfying* (1).

A scalar-valued function in H^1 is called *rigid* if, except for positive constant multiples of itself, no functions in H^1 have the same argument as it; the term was introduced by Sarason [7]. Earlier, Nakazi [4] called it *strongly outer*. In [5], he also gave an alternative definition that a nonzero function g in H^1 is rigid if k is constant whenever kg lies in H^1 for a nonnegative measurable function k. We extend this as follows.

Definition 3. Let F be a function in $H^1_{\mathscr{M}}$ with HL-factorization $F = ff_\sharp$. It is called *rigid* if K is constant whenever $fKf_\sharp$ lies in $H^1_{\mathscr{M}}$ for a measurable $\mathscr{M}$-valued function K satisfying (1).

By Proposition 1, a function in $H^1_{\mathscr{M}}$ is rigid if and only if, except for 'balanced' positive multiples of itself, no functions in $H^1_{\mathscr{M}}$ have the same partially isometric factor as it. By Proposition 2, if a function is rigid, its left factor is left-outer and right factor is right-outer. (So, by uniqueness of outer functions, the above definition does not depend on the choice of an HL-factorization.)

For a positive $\mathscr{M}$-valued integrable function W on the unit circle $\mathbb{T}$, let $L^2_{\mathscr{V}}(W)$ be a Hilbert space of $\mathscr{V}$-valued measurable functions on $\mathbb{T}$ with inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2_{\mathscr{V}}(W)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle W(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta}), \psi(e^{i\theta}) \rangle_{\mathscr{V}} \, d\theta.$$

Let $P_{\mathscr{V}}$ and $Q_{\mathscr{V}}$ denote the spaces of $\mathscr{V}$-valued trigonometric polynomials of the forms $u_0 + e^{i\theta}u_1 + \cdots + e^{im\theta}u_m$ and $e^{-i\theta}v_1 + \cdots + e^{-in\theta}v_n$, respcectively. We define

$$H^2_{\mathscr{V}}(W) = \overline{P_{\mathscr{V}}}^{L^2_{\mathscr{V}}(W)}, \qquad K^2_{\mathscr{V}}(W) = \overline{Q_{\mathscr{V}}}^{L^2_{\mathscr{V}}(W)}.$$

These spaces can be treated in terms of the standard Lebesgue space $L^2_{\mathscr{V}}$ if there exist a right-outer function h and a left-outer function $h_\sharp$ in $H^2_{\mathscr{M}}$ such that

$$W = h^*h = h_\sharp h_\sharp^*,$$

which we call *WM-factorizations* after Wiener–Masani [8]. Note that $hh_\sharp$ lies in $H^1_{\mathscr{M}}$.

The following result is a generalization of a spectral characterization of complete nondeterminacy for stationary processes, studied by Bloomfield et al. [1], that

$$H^2_{\mathscr{V}}(W) \cap K^2_{\mathscr{V}}(W) = \{0\} \tag{2}$$

holds if and only if h^2 is rigid in the scalar case ($h_\sharp = h$).

Theorem 4. *Let W be a positive $\mathscr{M}$-valued integrable function which admits the WM-factorizations $W = h^*h = h_\sharp h_\sharp^*$. Then (2) holds if and only if $hh_\sharp$ is rigid.*

参考文献

[1] P. Bloomfield, N. P. Jewell and E. Hayashi, Characterizations of completely nondeterministic stochastic processes. *Pacific J. Math.* **107** (1983), 307–317.

[2] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables. *Acta Math.* **99** (1958), 165–202.

[3] Y. Kasahara, A. Inoue and M. Pourahmadi, Rigidity for matrix valued-Hardy functions. Submitted.

[4] T. Nakazi, Exposed points and extremal problems in H^1. *J. Funct. Anal.* **53** (1983), 224–230.

[5] T. Nakazi, Kernels of Toeplitz operators. *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 607–616.

[6] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞. *Trans. Amer. Math. Soc.* **127** (1967), 179–203.

[7] D. Sarason, Exposed points in H^1, I. *Oper. Theory Adv. Appl.* **41** (1989), 485–496.

[8] N. Wiener and P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes, I. *Acta Math.* **98** (1957), 111–150.