Rademacher 級数から始まったこと・・・

米田　薫　（大阪府立大学・名誉教授）

２０１５年８月１０日

古くから Rademacher 関数の作るシステムは、もっとも単純な直交系のモデルとして知られていた。ここを出発点とする解析に Walsh Fourier 解析があり、これに関しては多くの研究がある。Walsh 関数系は Rademacher 系を完備化したものであり、Walsh 級数は三角級数とよく似た性質があることが知られている。一方、Rademacher 関数系は互いに独立な確率変数の系でもある。 よって、独立確率変数の研究では、もっとも単純でわかりやすい例としてよくモデルとして使われている。本講演では確率論の立場で Rademacher 級数を取り上げる。

n 次の Rademacher 関数とは、定義域が $[0,1]$ である次のような関数を言う。

$$r_n(x) \equiv sign(\sin 2^n \pi x) \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

すると、$r_1, r_2, \cdots$ は確率変数として、互いに独立で同じ分布関数を持ち（independent and identically distributed$\cdots$ i.i.d）更に　$\int_0^1 r_n(x)dx = 0 \cdots (n = 1, 2, \cdots)$ をみたす。

問題になるのは級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$$

の収束性である。これが概収束 (almost everywhere convergent $\cdots$ a.e.conv.) するための必要・十分条件は

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

であることがわかっている。更に $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$ とすれば、すべての $\alpha > 0$ について

$$\int_0^1 \exp(\alpha |R(x)|^2) dx < \infty$$

が成り立つ ([K-K], [K], [R])。以上の結果は、Marcinkiewicz と Zygmund [M-Z] によって一般の確率空間上に拡張された。

$W = W_1, W_2, W_3, \cdots$ が確率空間 (Ω, P) 上の i.i.d. で、$|W(\omega)| < M$, 更に W の分布関数 $F(t)$ が $F(t) + F(-t) = 1$ をみたすとき、

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_n W_n(\omega) = Y(\omega) \quad a.s.\ conv.(almost\ surely\ convergent)$$

であるための必要・十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ である。このとき、

$$E\big(\exp(\alpha|Y|)^2\big) \equiv \int_\Omega \exp(\alpha|Y(\omega)|)^2 dP < \infty, \quad (\forall \alpha > 0)$$

が成り立っている。

ここでは、上の結果で確率変数 $W(\omega)$ の条件を弱めると結果がどのように変化するかを検討する。

昔、河田龍夫先生が、「独立な確率変数の和の収束性と三角級数（フーリエ級数）の収束性には、どこか似たところがあって、統一して論じられるのではないか」と言われたことがあった。しかし、その後の両者の発展から見えてくることは、二つは基本的に違う道を進んでいるように見えることである。特に「独立」という概念は大変強力で、三角級数ではこれに匹敵するものが見当たらない。

参 考 文 献

[K-K] A.Khinchine, A.Kolmogorov : *Ü*ber konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. Mat Sb. 32(1925),668-677.
[K] A.Kolmogorov: *Ü*ber die Summen durch den Zufall bestimmer unabh*ä*ngiger Gr*ö*ssen.Math.Ann.99(1928)309-319;102(1929),484-488.
[M-Z] J.Marchinkiewicz, A.Zygmund: Quelques th*é*or*è*mes sur les fonctionens ind*é*pendentes. Studia Math. 54(1930),81-116.
[R] H.Rademacher: Einige S*ä*tze *ü*ber Reihen von allgemeinen Orthogonal Funktionen. Math.Ann.87(1922),112-138.

準距離空間の完備化，距離付け，およびベールの性質

本田 あおい (九工大情報工)　岡崎 悦明 (九工大名誉教授)

1 Introduction

本講演では，準距離空間の完備化，距離付け，およびベールの性質についての基本事項を調べる。

(X,ρ) を準距離空間とする．(X,ρ) は一様空間であるから完備化可能である (1, 2 章. §3. $n°7$). 即ち，X を稠密な部分集合として含む完備な一様空間 $\hat{X}$ が存在し，$\hat{X}$ は X 上に ρ と同じ位相を導く．しかし, $\hat{X}$ の完備一様構造は，元の (X,ρ) が準距離空間でも，準距離で定まるとは言えず，さらに ρ との関連も一般には見えない．本講演では完備化 $(\hat{X},\hat{\rho})$ が再び準距離空間となる条件を調べる．

準距離空間は一様構造の可算基を持つので，距離付け可能である．この距離と元の準距離との関連については，Heinonen ([4, Prop. 15.5]) に述べられている．即ち，ある正数 $\epsilon > 0$ が存在して，準距離 $\rho(x,y)^\epsilon$ はある距離と同値 (下記定義 3 の意味で) になる．

完備距離空間はベールの性質を持つが，完備準距離空間はどうであろうか? Heinonen による準距離空間の距離付け定理を用いることにより，完備準距離空間はベールの性質を持つことを報告する．

2 準距離空間

定義 1.([4,5,6,9])　X を集合とする．関数 $\rho(x,y) : X\times X \to [0,+\infty)$ が準距離とは
$\iff$

1. $\rho(x,y)\geq 0,\quad \rho(x,y)=0 \iff x=y,$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x),\quad x,y\ \in X,$ and
3. $\exists K\geq 1\ ;\ \rho(x,y)\leq K\left(\rho(x,z)+\rho(z,y)\right),\quad x,y,z\ \in X.$

定義 2.　準距離空間 (X,ρ) が完備であるとは，任意の基本列が収束すること．ただし $\{x_n\}\subset (X,\rho)$ が基本列とは $\lim_{\ell,m\to+\infty}\rho(x_\ell,x_m)=0$ であること．

定義 3.　集合 X 上の二つの準距離 ρ_1,ρ_2 が同値である（equivalent）とは，
$\iff\ \exists C_1,C_2>0; C_1\rho_1(x,y)\leq\rho_2(x,y)\leq C_2\rho_1(x,y),\quad x,y\in X$　が成り立つこと．

準距離 ρ_1,ρ_2 が同値であるとき，(X,ρ_1) が完備であることと (X,ρ_1) が完備であることとは同じである．

定義 4.　準距離空間 (X,ρ), (X',ρ') が等距離であるとは，全単射 $\varphi : X\to X'$ であって $\rho'(\varphi(x),\varphi(y)) = \rho(x,y),\quad x,y\ \in X$ を満たすものが存在すること．

定義 5.　2 変数実数値関数 $f(x,y) : (X,\rho)\times(X,\rho)\to I\!R$ が一様連続とは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して正数 $\delta>0$ が存在して, $\rho(x,x')<\delta,\ \rho(y,y')<\delta$ であれば $|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$ となること．

3 完備化

準距離空間 (X,ρ) の完備化 $(\hat{X},\hat{\rho})$ として次の性質を持つ空間を採用したい :

1.　$(\hat{X},\hat{\rho})$ は完備準距離空間.
2.　等距離埋め込み写像 $\iota : (X,\rho)\to(\hat{X},\hat{\rho})$ が存在し，$\iota(X)$ は $(\hat{X},\hat{\rho})$ で稠密である.
3.　もし二つの完備準距離空間 $(\hat{X}_i,\hat{\rho}_i),\quad i=1,\ 2$ が存在して，稠密な値域をもつ等距離埋め込み写像 $\iota_i : (X,\rho)\to(\hat{X}_i,\hat{\rho}_i),\quad i=1\ 2$ が存在すれば，等距離写像 $I : (\hat{X}_1,\hat{\rho}_1)\to(\hat{X}_2,\hat{\rho}_2)$ で $I(\iota_1(x))=\iota_2(x),\ x\in X$ を満たすものが存在する.

本講演では, この完備化が存在するための一つの十分条件を与える次の結果を報告する.

定理 1.　準距離 $\rho(x,y): X\times X\to[0,+\infty)$ が直積空間 $(X,\rho)\times(X,\rho)$ 上で一様連続であれば，上記の条件 1. および 2. を満たす完備準距離空間 $(\hat{X},\hat{\rho})$ が存在する．さらにこのとき条件 3. の一意性も成り立つ.

4　距離付け

補題 1.([3,6,8])　準距離 ρ が $\rho(x,y)\le 2\mathrm{Max}\{\rho(x,z),\rho(z,y)\},\quad x,y,z\in X$ を満たすとする．このとき，次を満たす距離 $d(x,y)$ が構成できる： $\frac{1}{4}\rho(x,y)\le d(x,y)\le\rho(x,y),\quad x,y\in X.$

$\rho(x,y)$ を準距離とすれば任意の $\varepsilon>0$ に対して $\rho(x,y)^\varepsilon$ もまた準距離であり, 次の不等式を満たす : $\rho(x,y)^\varepsilon\le(2K)^\varepsilon\mathrm{Max}\{\rho(x,z)^\varepsilon,\rho(z,y)^\varepsilon\},\quad x,y,z\in X$. Heinonen [4, Prop. 14.5] は $\varepsilon\to 0$ のとき $(2K)^\varepsilon\to 1$ となることに着目し，準距離空間の距離付けに関し次の結果を得た.

定理 2.(4, Prop. 14.5)　(X,ρ) を準距離空間とする．このときある $\varepsilon\in(0,1]$ および距離 $d_\varepsilon(x,y)$ が存在して， $\frac{1}{4}\rho(x,y)^\varepsilon\le d_\varepsilon(x,y)\le\rho(x,y)^\varepsilon,\quad x,y,z\in X$ を満たす.

5　ベールの性質

定義 6.　準距離空間 (X,ρ) の部分集合 A が X においていたるところ非稠密とは
$\Longleftrightarrow$ 閉包 $\overline{A}$ は空間のいかなる球をすっかり含むことはない.

定義 7.　準距離空間 (X,ρ) の部分集合 A が X において第一類集合とは
$\Longleftrightarrow$ $A=\cup_n A_n$, ただし A_n は X でいたるところ非稠密な集合，と表される.

定義 8.　準距離空間 (X,ρ) の部分集合 A が X において第二類集合とは
$\Longleftrightarrow$ X でいたるところ非稠密な集合列 A_n をどうとっても，は， $A=\cup_n A_n$ と表されることはない.

定義 9.　準距離空間 (X,ρ) が ベール 空間であるとは
$\Longleftrightarrow$ X は X で第二類集合であること.

補題 2.([2, 9 章, §5, $n^\circ 3$, 定理 1])　準距離空間 (X,ρ) の位相を与える距離 $d(x,y)$ が存在して，距離空間 $(X,d(x,y))$ が完備であるとき，準距離空間 (X,ρ) は ベール 空間である.

定理 3.　完備準距離空間 (X,ρ) はベール空間である.

系　完備準距離空間 (X,ρ) はベールの性質をもつ. 即ち，X が閉集合列 F_n の可算和集合，$X=\cup_n F_n$ で表されたとき，どれかの F_n は内点を含む, i.e, F_n はある球 $U(x;\varepsilon)$ を部分集合として含む.

文献

1. ブルバキ, 位相 1，東京図書 (1968)
2. ブルバキ, 位相 4，東京図書 (1977)
3. A. H. Frink, Distance-functions and the metrization problem, Bull. A. M. S., 43, 133-142, 1937.
4. Juha Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer, 2001.
5. A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, Approximations and the linearity of the Shepp space, Kyushu J. Math., 69-1, 173-194, 2015.
6. V. Schroeder, Quasi-metric and metric spaces, arXiv:math/0607304v1 [math:MG] 13 Jul 2006.
7. 竹之内脩, トポロジー　広川書店　昭和 45 年　12 版
8. 淡中忠郎, 位相群論　現代数学叢書　岩波　昭和 24 年
9. H. Triebel　A new approach to function spaces on quasi-metric spaces, Revista Matematica Complutense, 18-1, 7-48, 2005.

Fixed points, acute points and convergence theorems for families of nonlinear mappings

厚芝幸子 (Sachiko Atsushiba)　(山梨大学大学院総合研究部教育人間科学域)*

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $\| \cdot \|$. Let C be a nonempty closed convex subset of H. Then, a mapping $T : C \to C$ is called nonexpansive if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. We denote by $F(T)$ the set of fixed points of T.

Mann [6] introduced the following iterative procedure for approximation of fixed points of a nonexpansive mapping T on a nonempty closed convex subset C in a Hilbert space:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

where $\{\alpha_n\}$ is a sequence in $[0, 1]$. In 1967, Browder and Petryshyn [3] initiated the study of fixed points of strictly pseudo-contractions. In 1974, Ishikawa [4] proved strong convergence theorems for a Lipschitzian pseudo-contractive self-mapping in a Hilbert space. In 1992, Wittmann [8] proved the following strong convergence theorem of Halpern's type [2] in a Hilbert space:

Theorem 1. *Let C be a nonempty bounded closed convex subset of a Hilbert space H. Let T be a nonexpansive mapping of C into itself. For any $x_1 = x \in C$, define a sequence $\{x_n\}$ in C by*

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad \textit{for} \quad n \geq 1$$

where $0 \leq \alpha_n \leq 1$ satisfies

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty.$$

Then, $\{x_n\}$ converges strongly to $P_{F(T)} x$, where $P_{F(T)}$ is the metric projection from H onto $F(T)$.

In 2010, Kocourek, Takahashi and Yao [5] introduced a class of non–linear mappings called generalized hybrid. They showed that the class is a useful class of nonlinear mappings which contains the classes of nonexpansive mappings, nonspreading mappings, and hybrid mappings, in a Hilbert space H. In 2011, Takahashi and Takeuchi [7] introduced the concept of attractive points and extended

The author is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research No. 26400196 from Japan Society for the Promotion of Science.

* Department of Science Education, Graduate School of Education Science of Teaching and Learning, University of Yamanashi, 4-4-37, Takeda Kofu, Yamanashi 400-8510, Japan
e-mail: asachiko@yamanashi.ac.jp

Baillon's mean convergence theorem [1] without convexity. Let C be a nonempty subset of a Hilbert space H. For a mapping $T : C \to H$, we denote by $A(T)$ the set of attractive points of T ([7]), i.e.,

$$A(T) = \{z \in H : \|Tx - z\| \leq \|x - z\|, \quad \forall x \in C\}.$$

For attractive points, see Takahashi and Takeuchi [7].

In this talk, we study the concept of acute points of a nonlinear mapping. We study some properties of acute points, attractive points and fixed points. Using the idea of acute points and attractive points, we study fixed point properties for families of nonlinear mappings. And we prove some weak and strong convergence theorems for families of nonlinear mappings.

参考文献

[1] J.-B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sei. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511 - 1514.

[2] B. Halpern *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[3] F.E. Browder and W.V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space'*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967) 197–228.

[4] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[5] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces'* Advances in mathematical economics. **15**, 67?-88, Adv. Math. Econ., 15, Springer, Tokyo, 2011.

[6] W.R. Mann, *Mean value methods in iteration* Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506?510.

[7] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space* , J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.

[8] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math. **58** (1992), 486–491.

空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題の非適切性について

岡本 葵（信州大学学術研究院工学系）
町原 秀二（埼玉大学理工学研究科）

1 導入

空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (i\gamma_0\partial_t + \gamma_1\partial_x)\psi + m\psi = \phi\psi, \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + M^2)\phi = \psi^*\gamma^0\psi, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x),\ \phi(0,x) = \phi_0(x),\ \partial_t\phi(0,x) = \phi_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{C}^2$, $\phi : \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}$ は未知関数であり，$\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は与えられた初期値である．また，m, M は非負定数であり，

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}$$

である．ψ^* は ψ の転置複素共役 $(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$ を表す．

Sobolev 空間を

$$H^s := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) :\ \|\langle\cdot\rangle^s \widehat{f}\|_{L^2} < \infty\}$$

と定義する．ここで，$\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ であり，$\widehat{f}$ は f の Fourier 変換を表す．

本講演では，初期値を Sobolev 空間 $\mathcal{H}^{s,r} := H^s \times H^r \times H^{r-1}$ からとり，(1) の適切性を考える．ここで，初期値問題が適切であるとは，初期値問題の解が

(1) 存在し，　(2) 一意的であり，　(3) 初期値に関して連続である

という 3 条件を満たすことである．また，これらの条件のうち，1 つでも不成立のときには，初期値問題は非適切であるという．

2 主結果

空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の適切性は Chadam [1] 以来，数多くの研究がなされている．ここでは，町原-中西-津川 [4] による先行結果を述べる．

- $|s| \le r \le s + 1$, $(s, r) \ne (-1/2, 1/2)$ のとき $\mathcal{H}^{s,r}$ において適切
- $s > \max(r, 0)$ または $r > \max(s + 1, 1/2)$ のとき $\mathcal{H}^{s,r}$ において非適切

我々は，[4] においては取り扱われなかった $s + r < 0$ の場合について考察し，次を得た．

定理 1. $s \leq 0,\ r < -s$ とする．このとき，(1) は $\mathcal{H}^{s,r}$ において非適切である．

注意 2. $(s,r) = (-1/2, 1/2)$ においては，適切か非適切かは未解決問題である．ただし，[4] では，解写像が C^2 級ではないことが示されている．なお，逐次近似法により適切性を証明した場合には，解写像が滑らかになることが知られているため，$(s,r) = (-1/2, 1/2)$ では，逐次近似法を用いては適切性が得られない．

3 証明の概要

簡単のため，$m = M = 0$ する．$\Re(\psi_{0,1} - \psi_{0,2}) = \Im(\psi_{0,1} + \psi_{0,2}) = 0$ とし，$u_+ := \Im(\psi_1 - \psi_2)$, $u_- := \Re(\psi_1 + \psi_2)$ とおけば，(1) は

$$(\partial_t \pm \partial_x) u_\pm = \mp K[\phi_0, \phi_1] u_\mp. \tag{2}$$

とかける ([2])．ここで，$w = K[\phi_0, \phi_1]$ は次の線形波動方程式の解である．

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) w = 0, \quad w(0,x) = \phi_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = \phi_1(x).$$

$s < 0$ の場合は，[3] の手法を用いて非適切性を示す．具体的には，モジュレーション空間 $M^0_{2,1}(\mathbb{R})$ における (2) の適切性を利用して，逐次近似の各項を評価することにより，$\mathcal{H}^{s,r}$ におけるノルムインフレーションが起こることを示す．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次を満たす $(\psi_0, \phi_0, \phi_1) \in \mathcal{H}^{s,r}$, $T > 0$, (1) の解 (ψ, ϕ) を構成する．

$$\|(\psi_0, \phi_0, \phi_1)\|_{\mathcal{H}^{s,r}} < \varepsilon, \quad 0 < T < \varepsilon, \quad \|(\psi, \phi, \partial_t \phi)(T, \cdot)\|_{\mathcal{H}^{s,r}} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$s = 0$ の場合には，L^2-保存則のためにノルムインフレーションは期待できない．そこで，$(s,r) = (0,0)$ での適切性と (2) とを利用して解写像が不連続であることを示す．

参考文献

[1] J. Chadam, Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension, J. Functional Analysis 13 (1973), 173-184.

[2] J. Chadam, R. Glassey, On certain global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Klein-Gordon-Dirac equations in one and three space dimensions, Arch. Rational Mech. Anal 54 (1974), 223-237.

[3] T. Iwabuchi, T. Ogawa, Ill-posedness for nonlinear Schrödinger equation with quadratic non-linearity in low dimensions, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), no. 4, 2613-2630.

[4] S. Machihara, K. Nakanishi, K. Tsugawa, Well-posedness for nonlinear Dirac equations in one dimension, Kyoto J. Math., 50 (2010), No. 2, 403-451.

ON SOME INTEGRALS BETWEEN THE LEBESGUE INTEGRAL AND THE DENJOY INTEGRAL

TOSHIHARU KAWASAKI

College of Engineering, Nihon University, Fukushima 963–8642, Japan
(E-mail: toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp)

Throughout this talk, we denote by $\mathbf{(L)}(S)$, $\mathbf{(L^*)}(S)$ and $\mathbf{(D^*)}(S)$ the classes of Lebesgue integrable functions, improper Lebesgue integrable functions and restricted Denjoy integrable functions from $S \subset \mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$, respectively, and we denote by $|A|$ the measure of a measurable set A. We recall that a gauge δ is a function from an interval $[a, b]$ into $(0, \infty)$ and a δ-fine McShane partition is a collection $\{(I_k, x_k) \mid k = 1, \dots, k_0\}$ of non-overlapping intervals $I_k \subset [a, b]$ satisfying $I_k \subset (x_k - \delta(x_k), x_k + \delta(x_k))$ and $\sum_{k=1}^{k_0} |I_k| = b - a$. If $\sum_{k=1}^{k_0} |I_k| \leq b - a$, then we say that the collection is a δ-fine partial McShane partition. In [3] B. Bongiorno, Di Piazza and Preiss gave a minimal constructive integration process of Riemann type which contains the Lebesgue integral and the Newton integral. It is given as follows:

Definition 1. A function f from an interval $[a, b]$ into $\mathbb{R}$ is said to be C-integrable if there exists a number A such that for any positive number ε there exists a gauge δ such that

$$\left| \sum_{k=1}^{k_0} f(x_k)|I_k| - A \right| < \varepsilon$$

for any δ-fine McShane partition $\{(I_k, x_k) \mid k = 1, \dots, k_0\}$ satisfying

$$\sum_{k=1}^{k_0} d(I_k, x_k) < \frac{1}{\varepsilon},$$

where $d(I_k, x_k) = \inf_{x \in I_k} d(x, x_k)$. The constant A is denoted by

$$A = (C) \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

We denote by $\mathbf{(C)}([a, b])$ the class of all C-integrable functions from $[a, b]$ into $\mathbb{R}$.

In [1–3] B. Bongiorno et al. gave some criteria for the C-integrability. We say that a function f from an interval $[a, b]$ into $\mathbb{R}$ is Newton integrable if there exists a differentiable function F from $[a, b]$ into $\mathbb{R}$ such that $F' = f$ on $[a, b]$. We denote by $\mathbf{(N)}([a, b])$ the class of all Newton integrable functions from $[a, b]$ into $\mathbb{R}$. In [3] B. Bongiorno, Di Piazza and Preiss gave a criterion for the C-integrability. By the theorem $\mathbf{(C)}([a, b])$ is the minimal class which contains $\mathbf{(L)}([a, b])$ and $\mathbf{(N)}([a, b])$. In [4] D. Bongiorno gave a minimal constructive integration process of Riemann type which contains the Lebesgue integral and the improper Newton integral. It is given as follows:

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A36; Secondary 26A39.
Key words and phrases. Denjoy integral, improper Lebesgue integral, Lebesgue integral, improper Newton integral, Newton integral, $\tilde{C}$-integral, C-integral.

Definition 2. A function f from an interval $[a,b]$ into $\mathbb{R}$ is said to be $\tilde{C}$-integrable if there exist a countable subset $N \subset [a,b]$ and a number A such that for any positive number ε there exists a gauge δ such that

$$\left| \sum_{k=1}^{k_0} f(x_k)|I_k| - A \right| < \varepsilon$$

for any δ-fine McShane partition $\{(I_k, x_k) \mid k = 1, \ldots, k_0\}$ satisfying

$$\sum_{k=1}^{k_0} d(I_k, x_k) < \frac{1}{\varepsilon}$$

and $x_k \in N$ implies $x_k \in I_k$. The constant A is denoted by

$$A = (\tilde{C}) \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

We denote by $(\tilde{C})([a,b])$ the class of all $\tilde{C}$-integrable functions from $[a,b]$ into $\mathbb{R}$.

In [4] D. Bongiorno gave some criteria for the $\tilde{C}$-integrability. We say that a function f from an interval $[a,b]$ into $\mathbb{R}$ is improper Newton integrable if there exist a countable subset $N \subset [a,b]$ and a function F from $[a,b]$ into $\mathbb{R}$ such that $F' = f$ on $[a,b] \setminus N$. We denote by $(\mathbf{N}^*)([a,b])$ the class of all improper Newton integrable functions from $[a,b]$ into $\mathbb{R}$. In [4] D. Bongiorno gave a criterion for the $\tilde{C}$-integrability. By the theorem $(\tilde{C})([a,b])$ is the minimal class which contains $(\mathbf{L})([a,b])$ and $(\mathbf{N}^*)([a,b])$. In [11,14] Nakanishi gave criteria for the restricted Denjoy integrability. Motivated the results of Nakanishi, in [10] Kawasaki and Suzuki gave new criteria for the C-integrability, and in [9] Kawasaki gave new criteria for the $\tilde{C}$-integrability. In 2004 D. Bongiorno showed a criterion for the improper Lebesgue integrability [5]. In this talk, motivated by the results above, we will give new criteria for some integrability in the style of Nakanishi.

References

[1] B. Bongiorno, *Un nuovo integrale per il problema della primitive*, Le Matematiche **51** (1996), 299–313.

[2] ———, *On the C-integral*, AMS Special Session on Nonabsolute Integration (University of Toronto, Toronto, September, 2000).

[3] B. Bongiorno, L. Di Piazza, and D. Preiss, *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 117–126.

[4] D. Bongiorno, *On the problem of nearly derivatives*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2004** (2004), 275–287.

[5] ———, *Riemann-type definition of improper integrals*, Czechoslovak Mathematical Journal **54** (2004), 717–725.

[6] A. M. Bruckner, R. J. Freissner, and J. Foran, *The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Coll. Math. **50** (1986), 289–293.

[7] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[8] R. Henstock, *The general theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[9] T. Kawasaki, *Criteria for the $\tilde{C}$-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 11 pages.

[10] T. Kawasaki and I. Suzuki, *Criteria for the C-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2015** (2015), 10 pages.

[11] S. Nakanishi (formerly S. Enomoto), *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, I*, Osaka Math. J. **7** (1955), 59–102.

[12] ———, *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, II*, Osaka Math. J. **7** (1955), 157–178.

[13] S. Nakanishi, *The Denjoy integrals defined as the completion of simple functions*, Math. Japon. **37** (1992), 89–101.

[14] ———, *A new definition of the Denjoy's special integral by the method of successive approximation*, Math. Japon. **41** (1995), 217–230.

[15] W. F. Pfeffer, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Oxford, 1993.

[16] S. Saks, *Theory of the integral*, Warsaw, 1937.

A note on fractional integrals of martingales

Gaku Sadasue(Osaka Kyoiku University)

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, and $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ a nondecreasing sequence of sub-σ-algebras of $\mathcal{F}$ such that $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$. The conditional expectation operators relative to $\mathcal{F}_n$ is denoted by E_n.

A sequence of integrable random variables $f = (f_n)_{n\geq 0}$ is called a martingale relative to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ if, for every n, f_n is $\mathcal{F}_n$ measurable and satisfies

$$E_n[f_m] = f_n \quad (n \leq m).$$

For a martingale $f = (f_n)_{n\geq 0}$ relative to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, denote its martingale difference by $d_n f = f_n - f_{n-1}$.

We say a filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ is regular if there exists $R > 0$ such that

$$f_n \leq R f_{n-1}$$

for all non-negative martingales $(f_n)_{n\geq 0}$. We denote by $B(M_1,\, M_2)$ the set of all bounded martingale transforms from M_1 to M_2.

In [2], Chao and Ombe defined the fractional integral $I_\alpha f = ((I_\alpha f)_n)_{n\geq 0}$ of a dyadic martingale f by

$$(I_\alpha f)_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k\alpha}\, d_k f.$$

Based on the result by Watari [7], they showed the boundedness of the fractional integrals on Hardy spaces and Lipschitz spaces of dyadic martingales. Later, their results was extended to more general martingales.

To explain this, assume that $\mathcal{F}_n$ is generated by countable atoms. We denote by $A(\mathcal{F}_n)$ the set of all $(\mathcal{F}_n, P)$-atoms.

For $\alpha > 0$, we define the fractional integral $I_\alpha f = ((I_\alpha f)_n)_{n\geq 0}$ of $f = (f_n)_{n\geq 0}$ by

$$(I_\alpha f)_n = \sum_{k=0}^{n} b_{k-1}^{\alpha}\, d_k f, \tag{1}$$

where b_k is an $\mathcal{F}_k$-measurable function such that

$$b_k(\omega) = P(B) \quad \text{for a.s. } \omega \in B \text{ with } B \in A(\mathcal{F}_k).$$

In [5], Morrey-Campanato spaces of martingales were defined and the boundedness of (1) on these spaces were established.

In this talk, we give a remark on fractional integrals of martingales.

References.

[1] D. R. Adams, A note on Riesz potentials, Duke Math. J. 42 (1975), no. 4, 765–778.

[2] J.-A. Chao and H. Ombe, Commutators on Dyadic Martingales, Proc. Japan Acad., 61, Ser. A (1985), 35–38.

[3] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat. Appl. (7) 7 (1987), no. 3-4, 273–279.

[4] L. I. Hedberg, On certain convolution inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 505–510.

[5] E. Nakai and G. Sadasue, Martingale Morrey-Campanato spaces and fractional integrals, J. Funct. Spaces Appl. Vol. 2012 (2012), Article ID 673929, 29 pages.

[6] E. Nakai, G. Sadasue and Y. Sawano, Martingale Morrey-Hardy and Campanato-Hardy Spaces, J. Funct. Spaces Appl. Vol. 2013 (2013), Article ID 690258, 14 pages

[7] C. Watari, Multipliers for Walsh Fourier series. Tohoku Math. J., 16 (1964), 239–251.

[8] F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis, Lecture Notes in Mathematics, 1568, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

階位空間としての **Orlicz** 空間の構造とその回帰性について

Hiro-o Kita

1　はじめに

階位空間 (ranked space) は 1954 年に Kunugi によってはじめて導入された。その後，Nakanishi によって深く研究された。その後，Kita and Yoneda は Orlicz 空間に階位空間の構造を入れることができることを示した。そして通常の Banach 空間としての Orlicz 空間と階位空間としての Orlicz 空間との間の性質の違いについて興味深い結果を与えた。特に共役空間の考え方が重要である。

Orlicz 空間は Nakano, Luxemburg によってノルムが導入され，Orlicz 空間は Banach 空間となった。そして Orlicz 空間は Banach 空間としての研究が進み，いくつもの重要な結果が与えられた。

しかし，Orlicz 空間を定める Young 関数が Δ_2 条件 (doubling condition) を満足しない時にはきわめて複雑な性質をもつ。

今回の講演では以下の点にていて考え方を説明する。

1. 階位空間とはなにか？　私自身，階位空間を理解しているとはとても言えないが，なにか重要なものがありそうに思えるので，考えていることを説明する。
2. 階位空間は位相空間か？　功刀先生の説明の例をあげ，Orlicz 空間との関係を説明する。
3. Banach 空間の Orlicz 空間をわざわざ階位空間として取り扱うのはなぜか？
4. Orlicz 空間は一般的になぜ回帰的にならないのか？
5. 階位空間の解析学への応用はどのようなことが可能か？

講演では時間に限りがあるので，必要な定義の一部ははここで与えておくことにする。

定義 1.1. 関数 $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ が Young function であるとは Φ が次の性質を持つこととする:

1. Φ は $(0, +\infty)$ で convex,
2. Φ は $(0, +\infty)$ で left continuous,
3. $\lim_{t\to+0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$,
4. $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = \Phi(+\infty) = \infty$,
5. $\Phi \not\equiv 0 \quad \Phi \not\equiv +\infty \qquad \text{on } (0, +\infty)$.

定義 1.2. (Orlicz space) (X,μ) を σ-finite measure space とし Φ を Young 関数とする.

$$L^{\Phi}(X,\mu) := \left\{ f : \int_X \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) d\mu < +\infty \quad \text{for some} \quad \lambda > 0 \right\}$$

とおく。このとき空間 $L^{\Phi}(X,\mu)$ は Orlicz 空間と呼ばれる. 次の定義のノルムで Banach 空間となる.

定義 1.3. (Luxemburg-Nakano norm)

$$\|f\|_{L^{\Phi}(X,\mu)} := \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) d\mu \le 1 \right\}.$$

とおく。このノルム $\|\cdot\|_{L^{\Phi}(X,\mu)}$ は Nakano と Luxemburg の論文の中で与えられた.

階位空間についての定義の詳細は Nakanishi の論文を参照していただきたい。

2 主な結果

定理 2.1. Φ を *Young* 関数とする。関数列 $\{f_\ell : \ell \ge 1\}$ および関数 f_0 はともに *Orlicz* 空間 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ に属すものとする。このとき

$$\lim_{\ell\to\infty} ||f_\ell - f_0||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} = 0$$

が成り立つための必要十分条件は，任意の $\alpha \ge 1$ に対して，十分大きな自然数 $\ell_0 = \ell_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ が存在して，$\ell \ge \ell_0$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx < \infty \qquad for \qquad \ell_0 \le \ell,$$

および

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx = 0$$

が成り立つことである。

注意: ここで次のことを注意しておく。上の関数列について，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x)|)dx < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_0(x)|)dx < \infty$$

が成り立つことを期待することはできない。次のような例が作れる。

功刀先生の論文の中で次のような問題が提起されている。

問題 19. linear topological space での有界集合の定義を linear ranked space の中で与える。Reflexive (反射的) となる条件を求める。