

解答例

1. 取り出した部品が A, B, C 社のものであるという事象を

それぞれ A, B, C とし.

取り出した部品が不良品である事象を E とする. このとき.

$$P(C|E) = \frac{P(C) \cdot P(E|C)}{P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.02}{0.3 \times 0.02 + 0.3 \times 0.03 + 0.4 \times 0.02} = \frac{8}{23} \text{ である.}$$

2. 2回とも表, または 2回とも裏の確率は $\frac{1}{4}$ なので.

X	0	1	2
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

である.

$$3. (1) p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_0^1 p(x, y) dy \text{ である.}$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$p_1(x) = \int_0^1 x + y dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

$x < 0, x > 1$ のとき.

$$p_1(x) = \int_0^1 0 \, dy = 0 \quad \text{である}$$

$$\therefore p_1(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{となる.}$$

$$(2). E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) \, dx = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2}) \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) \, dx = \int_0^1 x^2(x + \frac{1}{2}) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{60}{144} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144} \quad \text{となる.}$$

$$(3). p_2(y) = \int_0^1 p(x, y) \, dx = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{となり}$$

$p_1(x)$ と同じなので.

$$E(Y) = \frac{7}{12}, \quad V(Y) = \frac{11}{144} \quad \text{である.}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_0^1 \, dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \right) \, dy \\ &= \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{なので} \end{aligned}$$

$$\sigma(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$$

$$\therefore \rho(X, Y) = \frac{\sigma(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144} \cdot \frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11} \quad \text{である.}$$

4. 赤玉が出る確率は $\frac{1}{2}$ なので、 X を赤玉が出る回数とすると

$$X \text{ は } B(500, \frac{1}{2}) \text{ に従う. } E(X) = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250.$$

$$V(X) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 125 \text{ より}$$

$$Z = \frac{X - 250}{\sqrt{125}} \text{ は、ほぼ } N(0, 1) \text{ に従う.}$$

$$P(240 \leq X \leq 260) = P\left(\frac{240 - 250 - 0.5}{\sqrt{125}} \leq Z \leq \frac{260 - 250 - 0.5}{\sqrt{125}}\right)$$

$$= P(-0.94 \leq Z \leq 0.94) = 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 0.94) = 2 \times 0.3264$$

$$= 0.6528 \quad \text{である}$$

$$5. (1) \bar{x} = \frac{1}{7} (7.3 + 8.3 + 7.6 + 7.8 + 8.0 + 7.9 + 7.7) = 7.8$$

$$u^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 (x_i - 7.8)^2 = 0.1 \quad \text{となる}$$

(2) 公式 2 を用いると、 $t_6(0.025) = 2.447$ より、95%信頼区間は

$$7.8 - \frac{\sqrt{0.1}}{\sqrt{7}} \cdot 2.447 \leq \mu \leq 7.8 + \frac{\sqrt{0.1}}{\sqrt{7}} \cdot 2.447 \text{ より}$$

$7.5 \leq \mu \leq 8.1$ である.

6. 公式5を用いると. $\chi_7^2(0.025) = 16.01$,

$\chi_7^2(1-0.025) = \chi_7^2(0.975) = 1.695$. σ^2 の95%信頼区間は.

$$\frac{7 \times 3.84}{16.01} \leq \sigma^2 \leq \frac{7 \times 3.84}{1.69} \quad \therefore 1.2 \leq \sigma \leq 4.0 \quad \text{となる.}$$

7. モデルチェンジ後の燃費を μ とする.

$H_0: \mu = 18.2$, $H_1: \mu > 18.2$ として検定する.

有意水準5%より棄却域は. $Z(0.05) = 1.6449$ を使うと.

$Z \geq 1.6449$ である. Z の実現値は.

$$Z = \frac{\sqrt{10}}{1.8} (19.5 - 18.2) = 2.284 \text{ で棄却域に入る}$$

$\therefore$ 有意水準5%で H_0 は棄却される

つまり. 向上したといえる.