解答例

1. $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{52}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ なので 独立である.

2. 事象A、B、Cをそれぞれとり出した部品がA社、B社、C社のもの

事象Dをとり出した部品が不良品とすると、ベイズの定理より

$$P(C|D)=\frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)\cdot P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)\cdot P(C)}$$

$$=\frac{0.02\times0.4}{0.02\times0.3+0.03\times0.3+0.02\times0.4}=\frac{8}{23}$$ である

3. Xを1の目が出る回数とすると、Xは$B(150,\frac{1}{6})$に従う.

$E(X)=150\times\frac{1}{6}=25$, $V(X)=150\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{6}$ であり.

Zを$N(0,1)$に従うとすると、$\frac{X-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}$ はほぼ$N(0,1)$に従い、

$$P(30\leq X\leq 35)=P\left(\frac{30-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}\leq\frac{X-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}\leq\frac{35-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}\right)$$

$$=P\left(\frac{30-0.5-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}\leq Z\leq\frac{35+0.5-25}{\sqrt{\frac{125}{6}}}\right)=P(0.99\leq Z\leq 2.30)=$$

$= \Phi(2.30) - \Phi(0.99) = 0.4893 - 0.3389 = 0.1504$ となる.

4(1) $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy$

$0 \leq x \leq 1$ のとき. $p_1(x) = \int_0^1 x + y\, dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$

上記以外のとき. $p_1(x) = 0$ である.

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_1(x)\, dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\, dx = \int_0^1 x^4 + \frac{1}{2}x^3\, dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$

$\therefore V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}$

(3) $p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy$ は

$0 \leq y \leq 1$ のとき $p_2(y) = \int_0^1 x + y\, dx = y + \frac{1}{2}$

それ以外のとき $p_2(y) = 0$ なので $p_1(x)$ に一致する.

$\therefore E(X) = E(Y)$, $V(X) = V(Y)$ に注意する

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^1 dy=\int_0^1 \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}y^2\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}y^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{48-49}{144}=-\frac{1}{144}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\gamma(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}}=-\frac{1}{11}$$ である

5. 公式1より、95%信頼区間は $z(0.025)=1.96$ より

$$4.83-\frac{0.35}{\sqrt{10}}\cdot 1.96\le\mu\le 4.83+\frac{0.35}{\sqrt{10}}\cdot 1.96$$

$$4.61\le\mu\le 5.05$$ となる

6. データより計算すると、$\bar{x}=20.5$, $u^2=3.84$ となる。

$\chi_7^2(0.025)=16.01$, $\chi_7^2(0.975)=1.69$ と、公式5より

$$\frac{7\times 3.84}{16.01}\le\sigma^2\le\frac{7\times 3.84}{1.69}$$ となり

$$1.2\le\sigma\le 4.0$$ となる（σ^2 でなく σ であることに注意）

7. t検定を行う. μを母平均として.

$H_0: \mu = 4.00$, $H: \mu > 4.00$ とし. $\alpha = 0.05$で右側検定する.

棄却域は. $t \geq t_7(0.05) = 1.895$ である. 実現値は.

$$t = \frac{4.04875 - 4}{\sqrt{\frac{0.00833}{8}}} = 1.511$$ となり. 棄却域に入らない.

∴ H_0は棄却できない. ∴ 直径は4mmより大きいとはいえない.