確率・統計　解答例

1. 事象A, B, Cをそれぞれとり出した部品がA, B, C社のものであるとし、事象Dをとり出した部品が不良品とする.

ベイズの定理から

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$= \frac{0.2\cdot 0.04}{0.2\cdot 0.04 + 0.3\cdot 0.03 + 0.5\cdot 0.01}$$

$$= \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$ である

2. (1) $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy$.

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$p_1(x) = \int_0^1 x+y\,dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

上記以外のとき.

$p_1(x) = 0$　である

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x)\, dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{12}$

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\, dx - E(X)^2$

$= \int_0^1 x^3 + \frac{1}{2}x^2\, dx - \frac{49}{144}$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 - \frac{49}{144}$

$= \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$

(3) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\, dx\, dy$

$= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\, dy$

$= \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$p_1(x)$ と $p_2(y)$ が同じなので、$E(X) = E(Y)$, $V(X) = V(Y)$ を使うと

$$\gamma(X, Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{-1}{144}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{-1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$ である

3. 赤玉が出る回数を X とすると X は $B(500, \frac{1}{2})$ に従うので

ほぼ $N(250, 125)$ に従うとしてよい。

$Z = \frac{X-250}{\sqrt{125}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}(X-250)$ は $N(0,1)$ に従い。（ほぼ）

$$P(240 \leq X \leq 260) = P\left(\frac{240-0.5-250}{\sqrt{125}} \leq Z \leq \frac{260+0.5-250}{\sqrt{125}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-10.5}{\sqrt{125}} \leq Z \leq \frac{10.5}{\sqrt{125}}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{2.1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 0.94) = 2 \cdot 0.3264 = 0.6528$$ である。

4. 不変分散の平方根は

$\sqrt{\frac{50}{49}(11.5)^2} = 11.62$ また $z(0.025) = 1.96$ より

95%信頼区間は

$$68.7 - \frac{11.62}{\sqrt{150}} \cdot 1.96 \leq \mu \leq 68.7 + \frac{11.62}{\sqrt{150}} \cdot 1.96$$

$$65.48 \leq \mu \leq 71.92$$

$65.4 \leq \mu \leq 72.0$ である

5. $H_0 : \sigma^2 = 0.32^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq (0.32)^2$ とする.

有意水準10%で両側検定すると棄却域は

$x \leq \chi_{11}(0.95) = 4.575$

$x \geq \chi_{11}(0.05) = 19.68$ である.

xの実現値は

$x = \dfrac{12 \times (0.42)^2}{(0.32)^2} = 20.67$ で棄却域に入る

∴ 有意水準10%でH_0は棄却される.