

応用数学II 令和7年度後期 期末試験

注意：解答の順番は問わないが、どの問題の解答か分かるように書くこと。また、解答の書き方（文字や説明の丁寧さなど）により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。

1. 周期 2π をもち、区間 $(-\pi, \pi]$ において

$$f(x) = x$$

で与えられる関数について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。 (15点)
- (2) パーセバルの等式を適用して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を求めよ。ただし、パーセバルの等式は以下である。 (5点)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

2. 周期 2ℓ をもち、区間 $(-\ell, \ell]$ において

$$f(x) = 2x - 3$$

で与えられる関数のフーリエ級数を求めよ。ただし、周期 2ℓ の関数のフーリエ級数は次で与えられる。 (15点)

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx,$$
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right)$$

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。 (15点)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

4. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ および $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ を求めよ。 (10点)

5. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{r}(0)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ を求めよ。 (8点)
- (2) $\mathbf{r}(t)$ を弧長パラメータ表示した $\mathbf{r}(s)$ について、フレネ標構を求めよ。 (12点)

6. 次のスカラー場の点 $(0, 1, 1)$ における勾配を求めよ。 (10点)

$$f(x, y, z) = \frac{e^x}{1 + y^2 + z^2}$$

7. 次のベクトル場の発散および回転を求めよ。この問題では途中計算を特に丁寧に書くこと。 (10点)

$$\mathbf{a}(x, y, z) = (-y, x, 0)$$