

応用数学II 令和5年度後期 期末試験

注意：解答の順番は問わないが，どの問題の解答か分かるように書くこと．また，解答の書き方（文字や説明の丁寧さ）により，記載の配点とは別に，最大で10点の加点をすることがある．

1. 周期 2π をもち，区間 $(-\pi, \pi]$ において

$$f(x) = x$$

で与えられる関数について，次の問いに答えよ．

- (1) $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．(15点)
(2) パーセバルの等式を適用して，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を求めよ．ただし，パーセバルの等式は以下である．(5点)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

2. $a > 0$ とする．関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

のフーリエ正弦変換を求めよ．ただし，フーリエ正弦変換は次で与えられる．(15点)

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt$$

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ．(15点)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

4. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ ， $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ ， $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ について， $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ および $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ を求めよ．(10点)

5. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2}t)$ について，次の問いに答えよ．(20点)

- (1) $\mathbf{r}(0)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ を求め， $\mathbf{r}(t)$ を弧長パラメータ表示せよ．
(2) フレネ標構 $\mathbf{e}_1(s)$ ， $\mathbf{e}_2(s)$ ， $\mathbf{e}_3(s)$ ，および曲率 $\kappa(s)$ を求めよ．

6. 原点を中心とする単位球面は

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

と表される．この球面の表面積 S を求めよ．ただし，中学で習った球面の表面積を求める公式を使ってはいけない．(10点)

7. ベクトル場 $\mathbf{a}(x, y) = (x, 0)$ の流線を求めよ．(10点)