

応用数学II 令和4年度後期 期末試験

注意：解答の順番は問わないが、どの問題の解答か分かるように書くこと。また、解答の書き方（文字や説明の丁寧さ）により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。

1. 周期 2π をもち、区間 $(-\pi, \pi]$ において

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。(20点)

2. 周期 2π をもち、区間 $(-\pi, \pi]$ において

$$f(x) = |x|$$

で与えられる関数 $f(x)$ の複素形フーリエ級数を求めよ。ただし、複素形フーリエ級数とそのフーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx, \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

で与えられる。(15点)

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。(15点)

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

4. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ および $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ を求めよ。(10点)

5. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ について、次の問いに答えよ。(20点)

- (1) $\mathbf{r}(0)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ を求め、 $\mathbf{r}(t)$ を弧長パラメータ表示せよ。
- (2) フレネ標構 $\mathbf{e}_1(s)$, $\mathbf{e}_2(s)$, $\mathbf{e}_3(s)$, および曲率 $\kappa(s)$, 捩率 $\tau(s)$ を求めよ。

6. スカラー場

$$f(x, y, z) = \frac{e^x}{1 + y^2 + z^2}$$

の $(0, 1, 1)$ における勾配を求めよ。(10点)

7. 次のベクトル場の発散および回転を計算せよ。(10点。なお、この問題では途中計算を特に重視する。)

$$\mathbf{a}(x, y, z) = (y^2z, xz^2, x^2y)$$