

応用数学II 令和3年度後期 期末試験

注意：座席表の自分が座っている場所に○をつけること。

注意：解答の順番は問わないが、どの問題の解答か分かるように書くこと。また、解答の書き方（文字や説明の丁寧さ）により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。試験問題に関する質問は受け付けないので、問題に疑義がある場合は解答用紙に記入すること。座席表の裏面は計算用紙として使用して良い。

1. 周期 2π をもち、区間 $(-\pi, \pi]$ において

$$f(x) = 2x - 3$$

で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。(20点)

2. 周期 2ℓ をもち、区間 $(-\ell, \ell]$ において

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\ell < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \ell) \end{cases}$$

で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。ただし、一般区間のフーリエ級数とそのフーリエ係数は

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right)$$

で与えられる。(15点)

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。(15点)

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

4. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{c} のなす角を φ とするとき、 $\cos \varphi$ を求めよ。(10点)

5. 原点を中心とする単位球面は

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

と表される。この球面の表面積 S を求めよ。ただし、中学で習った球面の表面積を求める公式を使ってはいけない。(15点)

6. 次のベクトル場の発散および回転を計算せよ。(15点。なお、この問題では途中計算を特に重視する。)

$$\mathbf{a}(x, y, z) = (y^2 z, x z^2, x^2 y)$$

7. 次のスカラー場の、点 $(\pi, 0, 0)$ における勾配を求めよ。また、 $\mathbf{e} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ($|\mathbf{e}| = 1$) とするときの $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\pi, 0, 0)$, およびこれを最大にする \mathbf{e} を求めよ。(15点)

$$f(x, y, z) = x^2 \sin y \cos z$$