

線形代数学II 令和8年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- ・ 解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。
- ・ 質問は受け付けない。問題に疑義がある場合は、その内容を解答用紙に記入すること。
- ・ 解答用紙には2枚とも記名し、2枚目を1枚目に挟んで提出すること。

1. $\mathbb{C}^3$ において、ベクトル $v = (1, 2, 3)$ が $u = (2, 1, 5)$ と $w = (1, 0, a)$ によって生成される部分空間に入っているとき、 a の値を求めよ。(10点)
2. 次の $\mathbb{C}^3$ のベクトルの組が一次独立か判定せよ。(10点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbb{C}^3$ のベクトル

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

について、基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ に関する x の成分表示を求めよ。(10点)

4. 線形写像 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ を

$$f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、 $\ker f$ の次元を求めよ。(10点)

5. エルミート行列を1つ挙げよ。ただし、証明は書かなくてよい。(5点)

6. $V = \langle 1, x, x^2 \rangle$ とするとき、微分を表す線形写像

$$\frac{d}{dx} : V_{\{1, x, x^2\}} \rightarrow V_{\{1, x, x^2\}}$$

の表現行列を求めよ。(15点)

7. 次の行列が対角化可能か判定し、可能であれば対角化せよ。ただし、対角化の計算をする際、 $P^{-1}BP$ の計算過程は書かなくてもよい。(40点)

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$