線形代数学II 令和6年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- ・解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。
- ・質問は受け付けない。問題に疑義がある場合は、その内容を解答用紙に記入すること。
- ・解答用紙には2枚とも記名し、2枚目を1枚目に挟んで提出すること。

1. $\mathbb{C}^3$ において、ベクトル $v = (1, 4, -3)$ が $u = (2, 3, 2)$ と $w = (-1, 0, 2)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ。また、入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ。(10点)
2. 次の $\mathbb{C}^3$ のベクトルの組が基底であることを示せ。(15点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. 次の空間の次元を求めよ。(10点)

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = 2y = 3z\}$$

4. 線形写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と、基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ。(15点)

5. 次の行列 A が対角化可能ではないことを示せ。(10点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 次の行列 B を以下の順序で対角化せよ。(25点)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 B の固有値を求め、各固有値に属する固有空間を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ。
- (2) B を対角化する行列 P を求め、 $P^{-1}BP$ を計算せよ。(計算過程は書かなくても良い。)

7. エルミート行列 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ を以下の順序で対角化せよ。ただし、 C の固有値が3と-1であり、 $V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であることを使ってよい。(15点)

- (1) 行列 C を対角化するユニタリ行列 P を求めよ。また、この P がユニタリ行列であることを示せ。
- (2) $P^{-1}CP$ を計算せよ。(途中計算も書くこと。)