

線形代数学II 令和5年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- ・解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。
- ・質問は受け付けない。問題に疑義がある場合は、その内容を解答用紙に記入すること。
- ・解答用紙には2枚とも記名し、2枚目を1枚目に挟んで提出すること。

1. 次の \mathbb{C}^3 のベクトルの組が1次独立か判定せよ。(10点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. \mathbb{C}^3 のベクトル

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

について、基底 v_1, v_2, v_3 に関する x の成分表示を求めよ。(10点)

3. \mathbb{C}^3 のベクトル

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

について、 $\{u_1, u_2, u_3\}$ から $\{v_1, v_2, v_3\}$ への基底の変換行列を求めよ。(15点)

4. 次のベクトルの組から、 \mathbb{C}^3 の正規直交基底を作れ。(15点)

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. エルミート行列であり、かつユニタリ行列である 2×2 行列を1つ挙げよ。(証明は書かなくてよい。5点)

6. 次の行列 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない。対角化可能ではない行列がどれか、理由もつけて答えよ。ただし、「 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない」という事実を解答の中で使ってよいこととする。(15点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 次の行列 D を以下の順序で対角化せよ。(30点)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 D の固有値を求め、各固有値に属する固有空間を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ。

(2) D を対角化する行列 P を求め、 $P^{-1}DP$ を計算せよ。(計算過程は書かなくても良い。)