

線形代数学II 令和4年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- ・解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。
- ・質問は受け付けない。問題に疑義がある場合は、その内容を解答用紙に記入すること。
- ・解答用紙には2枚とも記名し、2枚目を1枚目に挟んで提出すること。

1. \mathbb{C}^3 において、ベクトル $v = (1, 4, -3)$ が $u = (2, 3, 2)$ と $w = (-1, 0, 2)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ。また、入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ。(10点)
2. 次の \mathbb{C}^3 のベクトルの組が基底であることを示せ。(15点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. \mathbb{C}^3 のベクトル

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

について、 $\{u_1, u_2, u_3\}$ から $\{v_1, v_2, v_3\}$ への基底の変換行列を求めよ。(15点)

4. 線形写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と、基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ。(15点)

5. 次の行列 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない。対角化可能ではない行列がどれか、理由もつけて答えよ。ただし、「 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない」という事実を解答の中で使ってよいこととする。(15点)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. 次の行列 D を以下の順序で対角化せよ。(30点)

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 D の固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に属する固有空間を、 $\langle v, w \rangle$ の形で表せ。
- (3) D を対角化する行列 P を求め、 $P^{-1}DP$ を計算せよ。(計算過程は書かなくても良い.)