

線形代数学II 令和3年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- 解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。
- 質問は受け付けない。問題に疑義がある場合は、授業で説明した通りにすること。
- 解答用紙の2枚目は渡しません（破損などは除く）。1枚の中に収めるようにしてください。（解答スペースにはあまり余裕がありません。節約して使ってください。）

1. 次の \mathbb{C}^3 のベクトルの組が1次独立か判定せよ。(10点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. 次のベクトルの組から、 \mathbb{C}^3 の正規直交基底を作れ。(15点)

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. 線形写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と、基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ。(15点)

4. 次の行列 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない。対角化可能ではない行列がどれか、理由もつけて答えよ。ただし、「 A, B, C のうち、2つが対角化可能で、1つが対角化可能ではない」という事実を解答の中で使ってよいこととする。(20点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列 D を以下の順序で対角化せよ。(40点)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 D の固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に属する固有空間を、 $\langle v, w \rangle$ の形で表せ。
- (3) D を対角化する行列 P を求め、 $P^{-1}DP$ を計算せよ。(計算過程は書かなくても良い。)