解答例

1. $v = \alpha u + \beta w$ をとくと

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$ より

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & a & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & a & -7 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3a-7 \end{array}\right] \qquad \therefore a = \frac{7}{3}$$

2.

$$\operatorname{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

$\therefore$ 1次独立でない

3.

$x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$ をとく.

$$[v_1\ v_2\ v_3 \mid x] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{44}{30} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

∴成分表示は $\frac{1}{15}\begin{bmatrix}22\\1\\-3\end{bmatrix}$.

4.

$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = 0$ をとく. $\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0$ より.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix} = 2.$$ ∴解の自由度は $3-2=1$.

$x = t$ とすると. $y = -t$, $z = -t$ より

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\-t\\-t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$ ∴ $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$ $\dim\ker f = 1$.

5. 例えば $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\frac{d}{dx}1 = 0 = [1\ x\ x^2]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{d}{dx}x = 1 = [1\ x\ x^2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\frac{d}{dx}x^2 = 2x = [1\ x\ x^2]\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 表現行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ である.

7. (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -2 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix}$

$= (t-1)((t-3)(t-2)-2) = (t-1)(t^2-5t+4)$

$= (t-1)^2(t-4)$. $\therefore$ 固有値は1と4. 重複度はそれぞれ2と1.

$V(1)$ を計算するため. $(E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をとく.

$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

なので解の自由度は $3-2=1$.

$x=t$ とすれば $z=-2t,\ y=4t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ -2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \dim V(1) = 1.$$

∴重複度と一致しないので対角化可能でない.

(2) $$\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 - 1 - 1 - (t-1) - (t-1) - (t-1)$$

$$= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 - 2 - 3t + 3 = t^3 - 3t^2 = t^2(t-3).$$

∴固有値は 0 と 3 重複度はそれぞれ 2 と 1.

$V(0)$ について $-B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をとくと.

$$\mathrm{rank}(-B) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

∴解の自由度は $3-1=2$.

$x=t,\ y=s$ とすれば，$z=-t-s$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle,\ \dim V(0) = 2.$$

$V(3)$ について，$(3E-B)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をとくと．

$$\mathrm{rank}(3E-B) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

$\therefore$ 解の自由度は 1．$y=t$ とすると．$z=t,\ x=t$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,\ \dim V(3) = 1.$$

$\therefore$ 重複度と固有空間の次元が一致するので対角化可能．

注：エルミート行列なので対角化可能としてもよい.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ とすれば $$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ となる.